

2001 年度前期日程入学試験学力検査問題

数 学 (理系)

志望学部／学科／専攻	試 験 時 間	指定解答用紙
理系学部	150 分	1 ～ 6

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子、解答用紙を開いてはいけない。
2. 問題冊子の白紙のページや問題の余白は草案のために使用してよい。なお、ページの脱落、印刷不鮮明の箇所などがあった場合には申し出ること。
3. 解答は、必ず黒鉛筆（シャープペンシルも可）で記入し、ボールペン・万年筆などを使用してはいけない。
4. 解答用紙の受験記号番号欄（1 枚につき 2 か所）には、忘れずに受験票と同じ受験記号番号をはっきりと判読できるように記入すること。
5. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
6. 解答用紙を持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ること。

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 a, b を正の数とする。2つの曲線

$$y = x^3 + bx^2, \quad y = ax^2 + abx$$

によって囲まれる2つの部分の面積の和を S とする。

(1) S を a と b で表せ。

(2) $a + b = 1$ のとき、 S を最小にする a, b の値と、そのときの S の値を求めよ。

2 関数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ ($x \neq 0$) について、

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad b = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

とおく。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) $-\frac{1}{2} \leq x$ の範囲で、3つの関数

$$\sqrt{1+2x}, \quad 1+ax, \quad 1+ax+bx^2$$

の大小関係を調べ、これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け。

3 1 から 200 までの整数が 1 つずつ記入された 200 枚のカードの入った箱がある。この箱から 1 枚のカードを無作為に抜き出して、それにかかれた数が奇数であればその数を得点とし、偶数の場合は奇数になるまで 2 で割って得られる奇数を得点とする。例えば、抜き出したカードの数が 28 であれば、これを 2 で 2 回割って得られる 7 が得点となる。1 枚のカードを抜き出したときの得点の期待値を求めよ。

4 四面体 OABC において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ, L, M, N, P, Q, R とし、 $\vec{p} = \overrightarrow{LP}$, $\vec{q} = \overrightarrow{MQ}$, $\vec{r} = \overrightarrow{NR}$ とおく。

(1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ を用いて表せ。

(3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{LP}$ となる空間の点とすると、四面体 XABC の体積および四面体 OABC の体積を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$ を用いて表せ。

5 複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ (ただし, x, y, u, v は実数) は $|z| = |w| = 1$ を満たし, $yv < 0$ とする。 $|1 + z + w| < 1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ。

6

(1) n を正の整数とする。 $t \geq 0$ のとき, 不等式 $e^t > \frac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

(2) 極限 $I_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^m e^{-x} dx$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) を求めよ。

