

入学試験過去問題

数 学

東北大学（理系）

対象年度：2000 年

試験時間：150 分

問題数：6 問

第 1 問

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, p, q を実数とする。

(1) $(aE + bK)^2 = pE + qK$ となる実数 a, b が存在するためには, p, q がどんな条件を満たすことが必要十分であるか。

(2) p, q が $p^2 + q^2 = 2$ を満たし, さらに

$$(aE + bK)^2 = pE + qK$$

$$(cE + dK)^2 = qE - pK$$

となる実数 a, b, c, d が存在するとする。このとき, p, q の値を求めよ。

第 2 問

α, β は $|\alpha + \beta| < 2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 x^2 - (|\alpha| + |\beta|)x + 1$$

の $0 \leq x \leq 1$ における最小値を求めよ。

第 3 問

実数 a, b, c, d が $ad - bc \neq 0$ を満たすとき、関数 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。
- (2) $f^{-1}(x) = f(x)$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。
- (3) $f^{-1}(x) = f(f(x))$ を満たし、 $f(x) \neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

第 4 問

数直線上を、原点 O から出発して動く点 A があるとする。一つのさいころを振り、その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし、出た目が $2, 3$ のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のときに左に 1 動かし、出た目が $5, 6$ のときは左に 2 動かすものとする。このとき、さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

第 5 問

$0 < t < 1$ として、頂点が $O(0, 0)$, $A(t, 0)$, $B(0, 1)$ である三角形と、頂点が O , $P(1-t, 0)$, $Q(1-t, 1-t)$, $R(0, 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき、 S を t の式で表せ。また、 S を最大にする t の値を求めよ。

第 6 問

数列 $\{\alpha_n\}$ を初項 $\frac{4}{5}$ ，公比 2 の等比数列，数列 $\{\beta_n\}$ を初項 $\frac{1}{5}$ ，公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列とする。

- (1) $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のとき， α_n の少数部分を求めよ。
- (2) $a_n = \alpha_n + \beta_n$ の少数部分 b_n を求めよ。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ。