入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（文系）

対象年度： 2026 年

試験時間： 100 分

問題数： 4 問

第　1　問

座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 u に対し，放物線 C の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ。

(2)　正の実数 u に対し，放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u,\ u-1)$ を通るものを ℓ_1, ℓ_2 とする。放物線 C と直線 ℓ_1 の接点を P_1 とし，放物線 C と直線 ℓ_2 の接点を P_2 とする。このとき，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ。また，u が正の実数全体を動くとき，直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と，それを与える u の値を求めよ。

第　2　問

以下の問いに答えよ。

(1)　$a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ。なお，解答は答えのみでよい。

(2)　$a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は無数に存在することを示せ。

(3)　正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすとする。このとき，$a + c$ および b は偶数であることを示せ。さらに，もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ。

第　3　問

平面上の三角形 OAB において，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおき，次が成り立つとする。

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{2}, \quad \left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{5}, \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1$$

ただし，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積を表す。s, t は $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ を満たす実数とし，辺 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を D，辺 OB を $t : (1-t)$ に内分する点を E とする。また，線分 AE と線分 BD の交点を F とし，これら 2 つの線分は点 F において直交しているとする。以下の問いに答えよ。

(1)　t を s を用いて表せ。また，s のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ および s を用いて表せ。

(3)　平面上の点 P で

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2 + 2\,\overrightarrow{\mathrm{FP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4$$

を満たすもの全体が半径 3 の円をなすための必要十分条件を $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ を用いて表せ。また，この必要十分条件が成り立つとき，s の値を求めよ。

第　4　問

関数 $f(x)=x^4-x^2$ を考える。座標平面において，x 軸と平行な直線 ℓ は曲線 $y=f(x)$ 上の相異なる 2 点における接線であるとする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　直線 ℓ の方程式を求めよ。なお，解答は答えのみでよい。

(3)　直線 ℓ と異なる直線 m は曲線 $y=f(x)$ とちょうど 2 つの共有点をもち，かつ x 軸と平行であるとする。直線 ℓ と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分の面積を S とし，直線 m と曲線 $y=f(x)$ で囲まれる部分の面積を T とするとき，$\dfrac{T}{S}>\sqrt{2}$ が成り立つことを示せ。