入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

東北大学（文系）

対象年度： 2024年

試験時間： 100分

問題数： 4問

第　1　問

a を正の実数とし，$f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $\mathrm{P}\,(p,\ f(p))$ とし，O から C へ引いた接線の接点を $\mathrm{Q}\,(q,\ f(q))$ とする。ただし，$q > 0$ とする。

(1)　p, q の値を a を用いて表せ。また，$p > q$ であることを示せ。

(2)　放物線 C の $q \leqq x \leqq p$ の部分，線分 OP，および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。S を a を用いて表せ。

(3)　(2) の S に対し，$S = \dfrac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

第　2　問

a, b, d を正の実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0)$, $\mathrm{A}\,(a,\ 0)$, $\mathrm{B}\,(b,\ 0)$, $\mathrm{D}\,(0,\ d)$ が次の条件をすべて満たすとする。

$$\angle\mathrm{OAD} = 15^\circ, \quad \angle\mathrm{OBD} = 75^\circ, \quad \mathrm{AB} = 6$$

以下の問いに答えよ。

(1)　$\tan 75^\circ$ の値を求めよ。

(2)　a, b, d の値をそれぞれ求めよ。

(3)　2 点 O, D を直径の両端とする円を C とする。線分 AD と C の交点のうち D と異なるものを P とする。また，線分 BD と C の交点のうち D と異なるものを Q とする。このとき，方べきの定理

$$\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AD} = \mathrm{AO}^2, \qquad \mathrm{BQ} \cdot \mathrm{BD} = \mathrm{BO}^2$$

を示せ。

(4)　(3) の点 P, Q に対し，積 $\mathrm{AP} \cdot \mathrm{BQ}$ の値を求めよ。

第　3　問

以下の問いに答えよ。

(1)　t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

(a)　$x > \dfrac{1}{\sqrt{t} - 1}$

(b)　$x \geqq 2 \log_t x$

をともに満たすとする。このとき，不等式

$$x + 1 > 2 \log_t (x + 1)$$

を示せ。

(2)　$n \leqq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

第　4　問

n を正の整数とする。2 つの整数 a_n, b_n を条件

$$(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

により定める。ここで，$\sqrt{2}$ は無理数なので，このような整数の組 $(a_n,\ b_n)$ はただ 1 つに定まる。

(1)　a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いてそれぞれ表せ。さらに，b_4, b_5, b_6 の値をそれぞれ求めよ。

(2)　等式

$$(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，$b_{n+1}b_{n-1} - {b_n}^2$ を求めよ。

(4)　$pb_6 - qb_5 = 1$, $0 \leqq p \leqq 100$, $0 \leqq q \leqq 100$ をすべて満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ を 1 組求めよ。