

入学試験過去問題
数学

東北大学（文系）

対象年度：2020年

試験時間：100分

問題数：4問

——このページは白紙——

——このページは白紙——

1 a を $-2 \leq a \leq 3$ を満たす実数とする。次の性質をもつ関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < -2 \text{ のとき}) \\ (x-a)(x+2) & (-2 \leq x \leq a \text{ のとき}) \\ 2(x-a)(x-3) & (a \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x > 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる図形の面積を $S(a)$ とおく。

- (1) $S(a)$ を求めよ。
- (2) $S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。また、 $S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

2 n を正の整数, a, b を 0 以上の整数とする。

- (1) $n \geq 3$ のとき不等式 $2^n + n^2 + 8 < 3^n$ が成り立つことを示せ。
- (2) 不等式 $2^n + n^2 + 8 \geq 3^n$ を満たす n をすべて求めよ。
- (3) 等式 $2^n + n^2 + 8 = 3^n + an + b$ を満たす a, b, n の組 (a, b, n) をすべて求めよ。

3 a を 0 でない実数とする。 xy 平面において、円 $C : x^2 - 2ax + y^2 - 4y + 4 = 0$ 、直線 $L : -4x + 3y + a = 0$ 、直線 $M : 3x + 4y - 7a = 0$ を考える。

- (1) L と M の交点が C 上にあるような a の値を求めよ。
- (2) C と L が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。
- (3) 集合 $\{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } L \text{ の共有点}\} \cup \{P \mid \text{点 } P \text{ は } C \text{ と } M \text{ の共有点}\}$ の要素の個数が 3 となるような a の値をすべて求めよ。

4 6 枚の硬貨を同時に投げて、表がでた硬貨が s 枚、裏がでた硬貨が t 枚であったとき、ベクトル $\vec{p} = (x, y)$ を $\vec{p} = s(2, -1) + t(-1, 2)$ で定める。

- (1) $x + y$ の値を求めよ。
- (2) $\vec{p} = (0, 6)$ となる確率を求めよ。
- (3) \vec{p} と $\vec{q} = (3, 1)$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ。

