

入学試験過去問題

数 学

東北大学（文系）

対象年度：2018年

試験時間：100分

問題数：4問

第 1 問

xy 平面における 2 つの放物線 $C: y = (x - a)^2 + b$, $D: y = -x^2$ を考える。

- (1) C と D が 2 点で交わり, その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき, C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。
- (2) 実数 a, b が (1) の条件を満たすとき, C と D の 2 交点を結ぶ直線は, 放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ に接することを示せ。

第 2 問

n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

- (1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。
- (2) $p(2)$ を求めよ。
- (3) $p(n-1)$ を求めよ。

第 3 問

実数 a は $0 < a < 4$ を満たすとする。 xy 平面の直線 $l: y = ax$ と曲線

$$C: y = \begin{cases} -x^2 + 4x & (x < 4 \text{ のとき}) \\ 9a(x - 4) & (x \geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を考える。 C と l で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とおく。

- (1) C と l の交点の座標を求めよ。
- (2) $S(a)$ を求めよ。
- (3) $S(a)$ の最小値を求めよ。

第 4 問

空間内に四面体 ABCD がある。辺 AB の中点を M, 辺 CD の中点を N とする。 t を 0 でない実数とし, 点 G を

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (t-2)\overrightarrow{GC} + t\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

を満たす点とする。

- (1) $\overrightarrow{DG}$ を $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ で表せ。
- (2) 点 G は点 N と一致しないことを示せ。
- (3) 直線 NG と直線 MC は平行であることを示せ。