

入学試験過去問題

数 学

東北大学（文系）

対象年度：2016 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

第 1 問

平面上で原点 O と 3 点 $A(3, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-1, 1)$ を考える。実数 s, t に対し、点 P を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) s, t が条件

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad -1 \leq s + t \leq 1$$

を満たすとき、点 $P(x, y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ の最大値を求め、そのときの P の座標を求めよ。

第 2 問

放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。
- (2) a, b を実数とする。関数 $y = -2|x - a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。
- (3) (2) で求めた領域 D の面積を求めよ。

第 3 問

ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ, ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として, 可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ。

第 4 問

鋭角三角形 $\triangle ABC$ において、頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。