

入学試験過去問題

数 学

東北大学（文系）

対象年度：2015 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

第 1 問

次の性質をもつ数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = 3$$

$$a_{n+1} > a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $a_n + a_{n+2}$ を a_{n+1} を用いて表せ。
- (2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

第 2 問

$t > 0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB , BP , PA の中点をそれぞれ M , Q , R とおく。 t が (1) で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ , QR , RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

第 3 問

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の 2 次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

を考える。

- (1) 方程式 $(*)$ が実数解をもつ確率を求めよ。
- (2) 方程式 $(*)$ が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。

第 4 問

$a > 0$ を実数とする。関数 $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

- (1) $M(a)$ を求めよ。
- (2) 実数 $x > 0$ に対し、 $g(x) = M(x)^2$ とおく。 xy 平面において、関数 $y = g(x)$ のグラフに点 $(s, g(s))$ で接する直線が原点を通るとき、実数 $s > 0$ とその接線の傾きを求めよ。
- (3) a が正の実数全体を動くとき、

$$k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$$

の最小値を求めよ。