

入学試験過去問題

数 学

東北大学（文系）

対象年度：2012年

試験時間：100分

問題数：4問

第 1 問

a を正の実数とし、 $a \neq \frac{1}{2}$ とする。曲線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と $Q(a, a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし、点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。 l と m の交点が C 上にあるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 2 直線 l, m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

第 2 問

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \left| 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3} \cos x - \frac{5}{4} \right|$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $t = -\sin x + \sqrt{3} \cos x$ とおく。 $f(x)$ を t の関数として表せ。
- (2) x が $0 \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) x が $0 \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また、 $f(x)$ が最大値をとる x は、 $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ。

第 3 問

袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

- (1) $N = 4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。 $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。
- (2) $N = 3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, それらのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。 p_n と q_n を求めよ。

第 4 問

平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$$

を満たすとする。ただし、記号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 p, q に対して、 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく。このとき、次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 p, q を求めよ。

- (2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1, \quad 1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2$$

を満たすとき、 $|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。