

入学試験過去問題

数 学

東北大学（文系）

対象年度：2011 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

第 1 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x に関する連立不等式

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2 \cdot 3^x + a \cdot 3^{-x} \leq 1 \end{cases}$$

が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

- (2) $x \geq -1$ を満たすすべての実数 x に対し不等式

$$3^x + a \cdot 3^{-x} \geq a$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。

第 2 問

三角形 OAB の辺 AB を $1:2$ に内分する点を C とする。動点 D は $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$ ($x \geq 1$) を満たすとし、直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

- (1) 実数 y を $\overrightarrow{OE} = y\overrightarrow{OB}$ で定めるとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

- (2) 三角形 OAB の面積を S 、三角形 ODE の面積を T とするとき、 $\frac{S}{T}$ の最大値と、そのときの x を求めよ。

第 3 問

先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり、玉の入った箱がある。箱の中には最初、赤玉 3 個、白玉 7 個、全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって、1 の目が出たら A が、2 または 3 の目が出たら B が、その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず、取り出した生徒のものとする。この操作を 2 回続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし、サイコロの 1 から 6 の目が出る確率は等しいものとし、また、箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

- (1) A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。
- (2) B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。

第 4 問

放物線 $y = x^2$ の 2 本の接線 l , m は垂直であるとする。

- (1) l の接点の座標が (a, a^2) で与えられるとき, l , m の交点の座標を a を用いて表せ。
- (2) l , m が y 軸に関して対称なとき, l , m および放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。