

入学試験過去問題

数 学

東北大学（文系）

対象年度：2010 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

第 1 問

$f(x) = x^3$ とするとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq a < x < y$ を満たすすべての a, x, y に対して

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

が成り立つことを示せ。

- (2) $y < x < b$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x) > \frac{(x - y)f(b) + (b - x)f(y)}{b - y}$$

が成り立つような b の範囲を求めよ。

第 2 問

放物線 $C: y = x^2$ に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $P(a, a^2)$ を通り、 P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。
- (2) l を (1) で求めた直線とする。 $a \neq 0$ のとき、直線 $x = a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し、 F の座標を求めよ。

第 3 問

数直線上を動く点 P がある。裏表の出る確率が等しい硬貨を 2 枚投げて、2 枚とも表が出たら P は正の向きに 1 だけ移動し、2 枚とも裏が出たら P は負の向きに 1 だけ移動し、それ以外のときはその位置にとどまるものとする。 P が原点 O を出発点として、このような試行を n 回繰り返して到着した位置を S_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $S_2 = -1$ となる確率を求めよ。
- (2) $S_3 = 1$ となる確率を求めよ。
- (3) 試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とするとき、 S_n を求めよ。
- (4) k を整数とするとき、 $S_n = k$ となる確率を求めよ。

第 4 問

四面体 ABCD において、辺 AB の中点を M、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

- (2) 点 Q が等式

$$|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$$

を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。

- (3) 点 R が等式

$$|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$$

を満たしながら動くとき、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

- (4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。