

入学試験過去問題

数 学

東北大学（文系）

対象年度：2004 年

試験時間：100 分

問題数：4 問

第 1 問

曲線 $C: y = x^2 - 2$ と直線 $L: y = x$ があり, 曲線 $D: y = -(x - a)^2 + b$ が L と接している。 C と L の 2 つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) b を a で表し, a の取り得る値の範囲を求めよ。
- (2) 2 つの曲線 C と D によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (3) a が動くとき, (2) の面積 $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

第 2 問

四角形 OABC は辺 OA を下底, 辺 CB を上底とし, $\angle AOC$ と $\angle OAB$ が等しい等脚台形である。 $a = |\overrightarrow{OA}|$, $c = |\overrightarrow{OC}|$, $m = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ とおく。

- (1) $m < \frac{a^2}{2}$ がなりたつことを示せ。
- (2) 等脚台形 OABC の面積 S を a , c , m を用いて表せ。
- (3) 対角線 OB と AC の交点を D とするとき, $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

第 3 問

複素数 z, w が条件

$$\frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} = \frac{1}{w}$$

を満たしている。ただし、 $z \neq \pm i$, $w \neq 0$ である。 z の実部, 虚部をそれぞれ x, y とし,
 w の実部, 虚部をそれぞれ u, v とする。

- (1) $(z-w)^2$ を u と v で表せ。
- (2) $u = 0$ ならば, $x = 0$ であることを示せ。
- (3) $u > 0, v > 0$, かつ w^2 の実部が 1 となるような x を求め, u を用いて表せ。

第 4 問

A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは、以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんを繰り返し、最後に残ったものを勝者とする。ただし、あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

- (1) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (2) 2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (3) 3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。
- (4) $n \geq 4$ とする。 n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。