

東北大学（理系） 2025 年 第 5 問

S を xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする。また、点 $P(a, b, c)$ を点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする。点 P と点 N を通る直線 ℓ と xy 平面との交点を Q とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ。
- (2) xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線を m とする。直線 m と球面 S の交点のうち、点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ。
- (3) 点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α を考える。点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ。