

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C: x^2 + y^2 = 1$ および円板 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ を考える。 D を底面とし点 $P(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を K とする。 $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ とする。 xyz 空間内の平面 $H: z = x$ を考える。すなわち、 H は xz 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である。 K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し、円 C 上の点 $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をとり、線分 PQ と E の共有点を R とする。

- (1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。 $r(\theta)$ を θ を用いて表せ。
- (2) 円錐 K の側面のうち、曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ部分、線分 PA 、および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。 θ と実数 h が条件 $0 \leq \theta < \theta + h \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta + h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta + h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

- (3) 円錐 K の側面のうち、円 C の $x \geq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。 T を求めよ。必要であれば $\tan \frac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい。