

東北大学（理系） 2024 年 第 5 問

$x \geq 2$ を満たす実数 x に対し,

$$f(x) = \frac{\log(2x - 3)}{x}$$

とおく。必要ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であること、および、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

- (1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(2x - 3)}$ とおくとき、関数 $g(x)$ ($x \geq 2$) を求めよ。
- (2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し、 $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。
- (3) 関数 $f(x)$ ($x \geq 2$) の増減と極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べ、 $y = f(x)$ ($x \geq 2$) のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし、(2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。
- (4) $2 \leq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して、等式

$$(*) \quad (2m - 3)^n = (2n - 3)^m$$

が成り立つとする。このような組 (m, n) をすべて求めよ。