

東北大学（文系） 2024 年 第 4 問

n を正の整数とする。2 つの整数 a_n, b_n を条件

$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}$$

により定める。ここで、 $\sqrt{2}$ は無理数なので、このような整数の組 (a_n, b_n) はただ 1 つに定まる。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いてそれぞれ表せ。さらに、 b_4, b_5, b_6 の値をそれぞれ求めよ。

- (2) 等式

$$(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n \sqrt{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

- (3) $n \geq 2$ のとき、 $b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2$ を求めよ。

- (4) $pb_6 - qb_5 = 1, 0 \leq p \leq 100, 0 \leq q \leq 100$ をすべて満たす整数 p, q の組 (p, q) を 1 組求めよ。