

東北大学（理系） 2022 年 第 3 問

正の整数  $n$  に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

とする。

(1) 正の実数  $x$  に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。