

多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし、 i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき、係数 $a_0, \dots, a_7$ をすべて求めよ。

- (2) $0 < \theta < \pi$ に対して、

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (1) で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて、多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える。 $\theta = \frac{\pi}{7}$ として、 $k = 1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく。このとき、 $Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し、 $x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ。