

東北大学（理系） 2015 年 第 4 問

$a > 0$ を実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、座標平面の 3 点

$$(2n\pi, 0), \quad \left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \frac{1}{\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}^a} \right), \quad ((2n+1)\pi, 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし、

$$B_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a} dx, \quad C_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$$

とおく。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq B_n \leq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。