

東北大学（理系） 2012 年 第 6 問

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき, $a_n > 1$ となることを示せ。
- (2) $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。
- (3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ。
- (4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して, 不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。さらに, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。