

東北大学（理系） 2008 年 第 2 問

n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$, $OA_1 = 1$, $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ をみたすとする。 A_2 から OA_1 へ垂線をおろし、交点を A_3 とする。 A_3 から OA_2 へ垂線をおろし、交点を A_4 とする。以下同様に、 $k = 4, 5, \dots$ について、 A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし、交点を A_{k+1} とし、順番に $A_5, A_6, \dots$ を定める。 $\vec{h_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

(1) $k = 1, 2, \dots$ のとき、ベクトル $\vec{h_k}$ と $\vec{h_{k+1}}$ の内積 $\vec{h_k} \cdot \vec{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h_k} \cdot \vec{h_{k+1}}$ とおくとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ここで、自然対数の

底 e について、 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。