

東北大学（理系） 2007 年 第 6 問

$a > 0$ に対し

$$I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} \, dx, \quad I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく。

(1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式

$$I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を示せ。

(3) 自然数 n に対して, $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a)$ を求めよ。