

東北大学（理系） 2006 年 第 4 問

$x > 0$ において、関数

$$f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$$

を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし、以下の問に答えよ。

- (1) $f'(2)$ を求め、 $x > 2$ のとき $f'(x) < 1$ であることを示せ。
- (2) k が自然数のとき、 $f'\left(\frac{1}{k}\right)$ を求めよ。
- (3) $f'(x) = 1$ となる x を値の大きいものから順に $x_1, x_2, x_3, \dots$ とおく。 $n \geq 2$ である自然数 n に対して、 $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n-1}$ を示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ を求めよ。