

東北大学（理系） 2002 年 第 6 問

$f_1(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする。 $f_2(x), f_3(x), \dots$ を次のように順次定義する。 $n = 2, 3, \dots$ に対し

$$F_{n-1}(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$$

とにおいて

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) F_{n-1}(t) dt$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、すべての x に対して $f_n(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、すべての $x \geq 0$ に対して $f'_n(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (3) $f'_4(1) = 0$ のとき、すべての $0 \leq x \leq 1$ に対して $f_1(x) = 0$ であることを示せ。