
確 認 試 験 問 題

図 形 と 計 量

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2025/03/16

1 第1問：正弦定理と余弦定理

1.1 問題

鋭角三角形 ABC を考える。頂点 C から辺 AB に垂線を下ろし、その足を H とする。

$BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\angle CAB = \theta$ (ただし $0^\circ < \theta < 90^\circ$) とおく。

(1) 線分 AH の長さを, a , b , c , $\cos \theta$ のうち必要なものを用いて表せ。

(2) この三角形について, 余弦定理と呼ばれる次の等式を示せ。

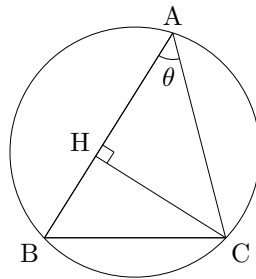
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

(3) $\triangle ABC$ の面積を, a , b , c , $\sin \theta$ のうち必要なものを用いて表せ。

(4) 各辺の長さが 6, 7, 8 である三角形は鋭角三角形であることを示せ。

(5) $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$ とする。このとき, $\triangle ABC$ の外接円の半径と, 内接円の半径を求めよ。

1.2 解答



(1) 余弦の定義より, $\frac{AH}{CA} = \cos \theta$ だから, $AH = b \cos \theta$ である。

(2) (1) より $BH = AB - AH = c - b \cos \theta$ である。 $\angle AHC = \angle BHC = 90^\circ$ より, $\triangle AHC$ と $\triangle BHC$ において三平方の定理を用いると,

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = b^2 - (b \cos \theta)^2$$

$$CH^2 = BC^2 - BH^2 = a^2 - (c - b \cos \theta)^2$$

が成り立つ。この 2 式を比較して

$$b^2 - (b \cos \theta)^2 = a^2 - (c - b \cos \theta)^2$$

であるから, これを整理して, 示すべき等式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

を得る。

(3) 表すべきは, $\triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin \theta$ である。

(4) 三角形の一番大きな内角が鋭角であれば, その三角形は鋭角三角形であるといえる。長さが最

大の8である辺の対角を α とすると、 α がこの三角形の内角で最大で、余弦定理から、

$$\cos \alpha = \frac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{4}$$

である。 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ において $\cos \alpha > 0$ であるため、 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ と結論づけられる。
よって、この三角形は鋭角三角形である。

- (5) (4) の α について、 $\angle ACB = \alpha$ である。 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ より、

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

となる。正弦定理より、外接円の半径を R とすると、

$$2R = \frac{c}{\sin \alpha} = \frac{8}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{32}{\sqrt{15}}$$

が成り立つ。ゆえに

$$R = \frac{16}{\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

である。また、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

となる。ところで、内接円の半径を r として、これを用いて $\triangle ABC$ の面積を表すと

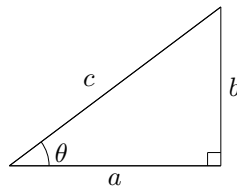
$$\triangle ABC = \frac{1}{2} r(a + b + c) = \frac{21}{2} r$$

となるから、この2つを比較して、

$$\frac{21}{2} r = \frac{21\sqrt{15}}{4}$$

より $r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ を得る。

1.3 解説



図において、 $\sin \theta = \frac{b}{c}$ 、 $\cos \theta = \frac{a}{c}$ 、 $\tan \theta = \frac{b}{a}$ です。 $\sin$ は c 分の b 、 $\cos$ は c 分の a 、 $\tan$ は a 分の b 、と辺をなぞっていくと、それぞれアルファベット s 、 c 、 t の筆記体を書くときの形状に似ていることで覚えることができます。

- (1) 定義を覚えているかの問題です。三角比の定義をきちんと確認しましょう。
- (2) 証明の流れを覚えていないと難しいと感じるかもしれません。(1) を用いて、三平方の定理で同じ辺を2通りの方法で表すことで等式を導くことができます。

- (3) 重要な公式です。底辺を $AB = c$ 、高さを $CH = b \sin \theta$ とする三角形と見て面積を表せます。
- (4) 三角形において、最も長い辺の対角が最も大きい角であることから、その大きさを調べることで、三角形が鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるかを判定できます。今回は鋭角三角形ですから、角度が 90° 未満、つまり $\cos$ が正であることを言えば良いです。 $\cos$ が 0 の場合は直角三角形（余弦定理が三平方の定理の形になる）、負の場合は鈍角三角形です。
- (5) 正弦定理より、外接円の半径 R について

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

が成り立ちます。内接円の半径 r は、 $\triangle ABC$ の面積を r を使って表すものと、 r を使わず表す 2 通りを比較することで求められる、よく用いられる手法があります。

1.4 採点

【第 1 問 20 点】

- (1) と (3) は完答のみ得点で、結論のみでよい。
- (1) 2 点
- (2) 6 点
- 三平方の定理を用いて 2 つの式を立式できたか。それを整理して示すべき等式を導けたか。
- (3) 2 点
- (4) 4 点
- 最大の辺の対角について、余弦を計算し、それが正であることを述べられたか。
- (5) 6 点
- 外接円の半径、内接円の半径それぞれに 3 点。
 - 有理化の有無は問わない。

2 第2問：三角比の関係

2.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 次の式を計算し、その値を整数で答えよ。

$$\frac{\cos 71^\circ}{\tan 2^\circ} - \cos 57^\circ - \tan 88^\circ \sin 161^\circ + \cos 33^\circ \tan 33^\circ$$

- (2) θ を $\tan \theta \neq 1$ を満たす鋭角とする。次の式は θ に依らない一定の値をとることを示し、その値を求めよ。

$$\frac{\sin^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} + \frac{(4 - 4 \tan^4 \theta) \cos^2 \theta}{(1 + \tan \theta)(1 - \tan \theta)} + \frac{\tan^2 \theta \cos \theta - \tan \theta \sin \theta}{2}$$

- (3) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、関数

$$f(\theta) = \sin^2 \theta + \cos \theta + 1$$

の最大値と最小値を、そのときの θ の値を含めて求めよ。

- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ を満たす θ が $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ を満たしている。このとき、次の2式の値を求めよ。

$$\sin \theta \cos \theta, \quad \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

2.2 解答

- (1) 与式に含まれる三角比の角度を 0° 以上 45° 以下で表す。

$$\cos 71^\circ = \cos(90^\circ - 19^\circ) = \sin 19^\circ$$

$$\cos 57^\circ = \cos(90^\circ - 33^\circ) = \sin 33^\circ$$

$$\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ}$$

$$\sin 161^\circ = \sin(180^\circ - 19^\circ) = \sin 19^\circ$$

また、 $\tan 33^\circ = \frac{\sin 33^\circ}{\cos 33^\circ}$ より $\tan 33^\circ \cos 33^\circ = \sin 33^\circ$ である。よって、与式 E は

$$E = \frac{\sin 19^\circ}{\tan 2^\circ} - \sin 33^\circ - \frac{\sin 19^\circ}{\tan 2^\circ} + \sin 33^\circ = 0$$

となり、整数値 0 である。

- (2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、

$$\frac{\sin^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} = -\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = -1$$

である。また、 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より、

$$\frac{(4 - 4 \tan^4 \theta) \cos^2 \theta}{(1 + \tan \theta)(1 - \tan \theta)} = 4 \cdot \frac{(1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \cos^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 4 \cdot \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 4$$

である。さらに、 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ より、

$$\frac{\tan^2 \theta \cos \theta - \tan \theta \sin \theta}{2} = \frac{\tan \theta \sin \theta - \tan \theta \sin \theta}{2} = 0$$

である。ゆえに、与式 E は

$$E = -1 + 4 + 0 = 3$$

となり、 θ に依らない一定の値 3 をとる。

(3) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて関数を式変形すると、

$$f(\theta) = -\cos^2 \theta + \cos \theta + 2 = -\left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

となる。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ において $\cos \theta$ のとりうる値の範囲は $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから、 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ のときに最大値、 $\cos \theta = -1$ のとき最小値をとる。実際に値を計算すると次のような解となる。

$$\begin{cases} \text{最大値は } \frac{9}{4} & (\theta = 60^\circ \text{ のとき}) \\ \text{最小値は } 0 & (\theta = 180^\circ \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4) $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{25}$$

となり、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いると

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}$$

ゆえ整理して

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$$

である。そして、

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{12}{25}\right) \\ &= -\frac{37}{125} \end{aligned}$$

である。

2.3 解説

(1)

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta},$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

を用います。関係式が沢山出てきますが、原点を中心とする半径 1 の円（単位円）と円周上の点を描いて、 x 座標を $\cos \theta$ 、 y 座標を $\sin \theta$ 、原点とその点を結ぶ直線の傾きを $\tan \theta$ と考えるようにすれば、 $90^\circ - \theta$ 、 $180^\circ - \theta$ の場合においても図形的に表されることが分かります。

(2) 関係式

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

を用います。この関係式により、式に含まれる三角比を別の三角比で表すことや、三角比の1つの値が分かっているときに他の三角比の値を導出することができます。

(3) 前の問題と同様、三角比の関係式を使います。三角比を余弦 $\cos$ に統一できるため、二次関数の問題に帰着できます。次の表は特定の角度とその正弦、余弦、正接です。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

(4) $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の対称式です。一応それぞれを求めることもできますが、その必要は本問ではありません。 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ を用いて式変形を行えば求めるべきものを計算できます。

2.4 採点

【第2問 18点】

(1) 4点

- 三角比の角度を揃えて計算できたか。

(2) 5点

- 三角比の関係式から式を整理できたか。

(3) 4点

- 関数に現れる三角比を統一できたか。
- 二次関数の最大最小を求め、それに対応する角度を求められたか。

(4) 5点

- 片方のみの完答で2点。両方の完答で5点。

3 第3問：正接を用いた測量

3.1 問題

平地に立つ2つの建物 A, B とそれを見る人を考える。人と建物 A, B は一直線上に立っている。

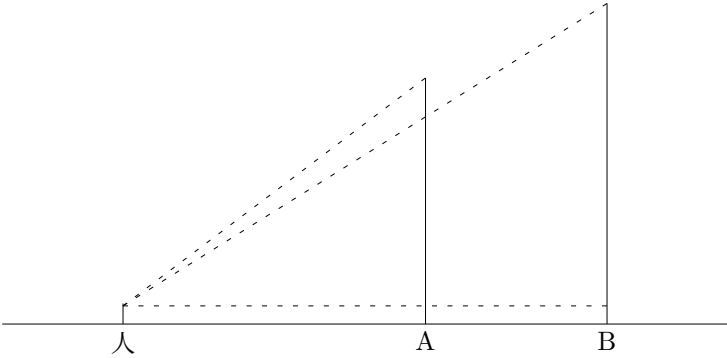


図 3.1: 平地に立つ人と建物 A, B

人の視線の高さは 1.5m であり、25m 離れた建物 A の頂点を見たときの仰角が 37° 、40m 離れた建物 B の頂点を見たときの仰角が 32° であった。この人が建物 A の頂点に立って建物 B の頂点を見ると、その仰角を θ とする。 $\tan \theta$ と $\tan z^\circ$ の値の差が最も小さくなる 1 以上 60 以下の整数 z を求めよ。ただし、人や建物の幅は考慮しないものとする。また、各角度の正接を求める際には、次の表を用いよ。

表 3.1: 角度と正接（小数第 5 位を四捨五入）

角度	正接	角度	正接	角度	正接	角度	正接
1°	0.0175	16°	0.2867	31°	0.6009	46°	1.0355
2°	0.0349	17°	0.3057	32°	0.6249	47°	1.0724
3°	0.0524	18°	0.3249	33°	0.6494	48°	1.1106
4°	0.0699	19°	0.3443	34°	0.6745	49°	1.1504
5°	0.0875	20°	0.3640	35°	0.7002	50°	1.1918
6°	0.1051	21°	0.3839	36°	0.7265	51°	1.2349
7°	0.1228	22°	0.4040	37°	0.7536	52°	1.2799
8°	0.1405	23°	0.4245	38°	0.7813	53°	1.3270
9°	0.1584	24°	0.4452	39°	0.8098	54°	1.3764
10°	0.1763	25°	0.4663	40°	0.8391	55°	1.4281
11°	0.1944	26°	0.4877	41°	0.8693	56°	1.4826
12°	0.2126	27°	0.5095	42°	0.9004	57°	1.5399
13°	0.2309	28°	0.5317	43°	0.9325	58°	1.6003
14°	0.2493	29°	0.5543	44°	0.9657	59°	1.6643
15°	0.2679	30°	0.5774	45°	1	60°	1.7321

3.2 解答

長さの単位は全て m であり、以下では省略する。

まず、建物 A, B の高さを求める。人と建物 A の距離を a_d 、建物 A の高さを a_h とすると、視線の高さ h_i を考慮して $\tan 37^\circ = \frac{a_h - h_i}{a_d}$ となる。また、人と建物 B の距離を b_d 、建物 B の高さを b_h とすると、 $\tan 32^\circ = \frac{b_h - h_i}{b_d}$ となる。それぞれに実際の値を代入し、 a_h と b_h の近似値を求めると次のようになる。

$$a_h = a_d \tan 37^\circ + h_i \doteq 25 \cdot 0.7536 + 1.5 = 20.34,$$

$$b_h = b_d \tan 32^\circ + h_i \doteq 40 \cdot 0.6249 + 1.5 = 26.496.$$

建物 A の頂点に立った人の視線の高さは $a_h + h_i \doteq 20.34 + 1.5 = 21.84$ 、建物 B の頂点の高さは $b_h \doteq 26.496$ でありこちらの方が大きく、高さの差は $b_h - a_h - h_i \doteq 26.496 - 21.84 = 4.656$ である。また、建物の間の距離は $b_d - a_d = 15$ であるから、建物 A の頂点に立った人が建物 B を見上げたときの角度 θ に対して

$$\tan \theta \doteq \frac{4.656}{15} = 0.3104$$

が成り立つ。これと最も差の小さい $\tan z^\circ$ は表より $z = 17$ のときである。

3.3 解説

問題中の図の通り、人の視線を通り地面に平行な線を引くと、直角三角形が現れ、正接の定義から建物の高さを求めることができます。計算の際には人の視線の高さを忘れないように注意しましょう。

3.4 採点

【第3問 10点】

- 建物 A, B の高さをそれぞれ正しく求められたか。
- 建物 A に立つ人の高さや建物 B の高さの差から正接を求められたか。
- 表にある正接の数値を正しく用いられたか。

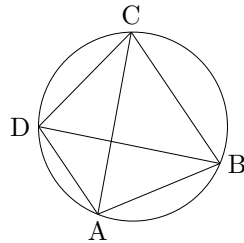
4 第4問：四角形と計量

4.1 問題

三角形 ABC は、 $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$ を満たしている。

- (1) $\cos \angle ACB$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の外接円の円周上に、 $BD = 7$, $AD < AB$ となるように点 D をとる。このとき、線分 AD の長さを求めよ。
- (3) 四角形 ABCD の面積を求めよ。

4.2 解答



- (1) $\triangle ABC$ について、余弦定理より、

$$\cos \angle ACB = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} = \frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$$

である。

- (2) $\angle ACB$, $\angle ADB$ は、ともに弧 AB の円周角であるから等しい。したがって

$$\cos \angle ADB = \cos \angle ACB = \frac{5}{7}$$

である。AD = x とおくと、 $\triangle ADB$ について、余弦定理より

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB,$$

すなわち

$$5^2 = x^2 + 7^2 - 2 \cdot x \cdot 7 \cdot \frac{5}{7}$$

が成り立つ。この式を整理すると

$$(x - 4)(x - 6) = 0$$

となり、題の条件 $AD < AB$ より $x < 5$ であるため、 $x = 4$ を得る。ゆえに

$$AD = 4$$

である。

- (3) $\triangle ABD$ について、余弦定理より

$$\cos \angle DAB = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = -\frac{1}{5}$$

である。CD = y とおくと、 $\triangle CDB$ について余弦定理より、

$$BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2 \cdot CB \cdot CD \cdot \cos \angle DCB,$$

すなわち

$$7^2 = 6^2 + y^2 - 2 \cdot 6 \cdot y \cdot \cos \angle DCB \quad (4.1)$$

が成り立つ。また、4点 A, B, C, D は同一円周上にあるから、 $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$ であって、

$$\cos \angle DCB = \cos(180^\circ - \angle DAB) = -\cos \angle DAB = \frac{1}{5}$$

であることより (4.1) を整理すると

$$(5y + 13)(y - 5) = 0$$

となり、長さ y は正だから $y = 5$ が得られる。

$$\sin \angle DAB = \sin \angle DCB = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

より、

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6},$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$$

だから、四角形 ABCD の面積は

$$\triangle ABD + \triangle BCD = 4\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$$

である。

4.3 解説

余弦定理や三角比の性質を用いて $\cos$, $\sin$ を求めることで長さや面積がわかりますが、四角形の4頂点が同一円周上にあることにより、四角形の向かい合う角の和が 180° であること、同じ弧に対する円周角が等しいなどの図形的性質を用いることになります。

また、円に内接する四角形の各辺の長さが a, b, c, d であるとき、その四角形の面積 S は

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \left(s = \frac{a+b+c+d}{2}\right)$$

で与えられます。

4.4 採点

【第4問 17点】

(1) 4点

- 余弦定理を正しく用いられたか。正しく計算できたか。

(2) 6点

- 余弦が等しい箇所を見つけられたか。余弦定理を正しく用いられたか。条件から解を絞り込めたか。

(3) 7点

- 面積を求めるために必要な辺の長さや正弦を求められたか。最終的な面積の計算を行えたか。

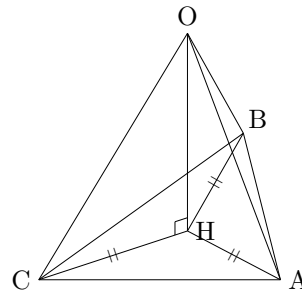
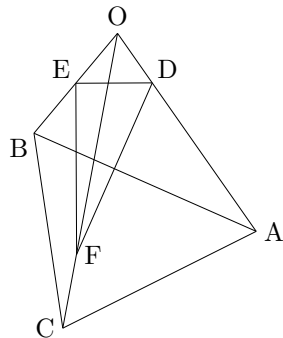
5 第5問：立体図形と三角比

5.1 問題

一辺の長さが4の正四面体 $OABC$ がある。辺 OA , OB , OC 上に、それぞれ点 D , E , F を $OD = 1$, $OE = 2$, $OF = 3$ となるようにとる。また、 O から $\triangle ABC$ へ垂線を下ろし、その足を H とする。

- (1) 線分 DE , EF , FD の長さを求めよ。
- (2) $\triangle DEF$ の面積を求めよ。
- (3) 線分 OH の長さを求めよ。
- (4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

5.2 解答



- (1) $OABC$ は正四面体で、各面は正三角形であるから、

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 60^\circ$$

である。 $\triangle ODE$, $\triangle OEF$, $\triangle OFD$ のそれぞれにおいて余弦定理を用いると、次が成り立つ。

$$DE^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 3,$$

$$EF^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7,$$

$$FD^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 7.$$

線分の長さは正だから

$$DE = \sqrt{3}, \quad EF = \sqrt{7}, \quad FD = \sqrt{7}$$

である。

- (2) $\triangle DEF$ について余弦定理を用いると,

$$\cos \angle DFE = \frac{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{11}{14}$$

である。したがって,

$$\sin \angle DFE = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DFE} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

となるから,

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot EF \cdot \sin \angle DFE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

である。

- (3) $OH \perp \triangle ABC$ であるから, $\triangle OAH$, $\triangle OBH$, $\triangle OCH$ はいずれも $\angle H = 90^\circ$ の直角三角形である。 $OABC$ は正四面体であるから, $OA = OB = OC$ である。 OH が共通であることも含めると, 直角三角形の斜辺ともう一つの辺の長さが等しいことにより

$$\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$$

となる。よって, 合同な三角形の辺を比較して,

$$AH = BH = CH$$

が成り立つ。したがって, H は $\triangle ABC$ の外接円の中心である。 $\triangle ABC$ において正弦定理を用いると,

$$2AH = \frac{4}{\sin 60^\circ}$$

ゆえに $AH = \frac{4}{\sqrt{3}}$ である。 $\triangle OAH$ において三平方の定理を用い,

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

である。

- (4) $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

である。 $OH \perp \triangle ABC$ であるから, 四面体 $OABC$ は底面 $\triangle ABC$, 高さ OH の三角錐と見なせる。その体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot \triangle ABC = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

である。

5.3 解説

立体図形において正弦定理や余弦定理を用いる問題です。

- (1) 余弦定理を用いる問題。
- (2) 余弦定理と三角比の関係式を用いる問題。
- (3) 三角形の合同から長さの等しい箇所を見つけ, 垂線の足が外接円の中心になっていることから

正弦定理を用いる，手順の多い問題です。正弦，余弦にとらわれず，図形から必要な情報を得られるようにします。

- (4) 角錐や円錐の体積は，底面積と高さの積の $1/3$ 倍です。

5.4 採点

【第 5 問 17 点】

- (1) 3 点

- 3 つの解答にそれぞれ 1 点。

- (2) 5 点

- (3) 5 点

- 三角形の合同から外接円，正弦定理の議論に持ち込めたか。

- (4) 4 点

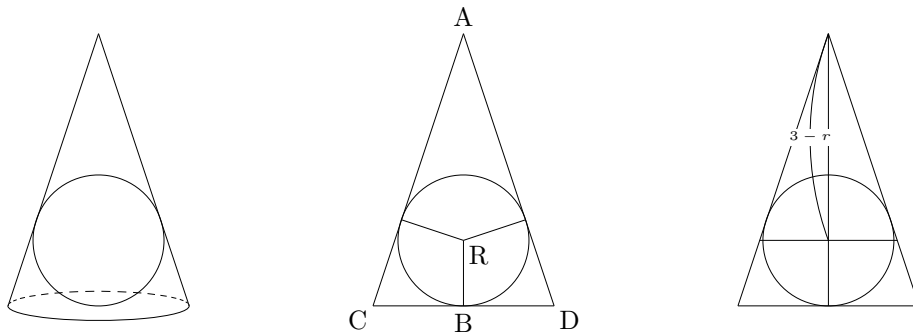
6 第6問：球と相似

6.1 問題

底面を、点 B を中心とする半径 1 の円とし、頂点 A を、 $AB = 3$ かつ線分 AB が底面に垂直になるようにとった円錐 C がある。 C の内部に、 C の側面と接し、 C の底面と点 B で接する球 S がある。

- (1) S の半径を求めよ。
- (2) S の表面積と体積を求めよ。
- (3) C の底面積を T 、体積を V とする。 S の中心を通り C の底面に平行な平面で C を切ったとき、その断面の面積は T の何倍になるか求めよ。また、切られた円錐のうち頂点 A を含む方の体積は V の何倍になるか求めよ。

6.2 解答



- (1) 円錐 C と球 S の対称性より、それらがちょうど半分ずつになるように切った断面を考えると、 C の断面は二等辺三角形、 S の断面は円であり、三角形の各辺で円が接している。 S の半径を r とすると、この円の半径も r である。図のように三角形の残り 2 頂点を C 、 D とし、円の中心を R とすると、 $AB \perp CD$ より、 $\triangle ABC$ に三平方の定理を用いて

$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{10}$$

である。また、対称性より $AD = AC = \sqrt{10}$ である。 $\triangle ACD$ は底辺 CD 、高さ AB の三角形と見なせるから

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = 3$$

であり、また、 $\triangle ACD = \triangle ARC + \triangle CRD + \triangle ARD$ より

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (\sqrt{10} + 2 + \sqrt{10}) = (\sqrt{10} + 1)r$$

と表せる。この 2 通りで表した面積を比較すると

$$(\sqrt{10} + 1)r = 3$$

となる。これを r について解き、球 S の半径 r を得る。

$$r = \frac{3}{\sqrt{10} + 1} = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}$$

- (2) 球 S の表面積を s 、体積を v とすると、その値は次の通り。

$$s = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^2 = \frac{44-8\sqrt{10}}{9}\pi,$$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^3 = \frac{52\sqrt{10}-124}{81}\pi.$$

- (3) 切られた円錐の A を含む部分を D とする。 C と D は相似である。高さ方向の比を考えると

$$AR : AB = 3 - r : 3$$

であり、これは D と C の相似比に等しい。したがって、切られたときの断面積、すなわち D の底面積を U とすると、

$$U : T = (3 - r)^2 : 3^2$$

が成り立つ。また、 D の体積を W とすると、

$$W : V = (3 - r)^3 : 3^3$$

が成り立つ。 U を T で、 W を V で表すと次の通り。

$$U = \frac{(3-r)^2}{3^2}T = \frac{110-20\sqrt{10}}{81}T,$$

$$W = \frac{(3-r)^3}{3^3}V = \frac{1300-310\sqrt{10}}{729}V.$$

よって、 U は T の $\frac{110-20\sqrt{10}}{81}$ 倍、 W は V の $\frac{1300-310\sqrt{10}}{729}$ 倍である。

6.3 解説

- (1) 断面を考えることで内接円の半径の問題に帰着する定番の問題です。
- (2) 半径 r の球の表面積は $4\pi r^2$ 、体積は $\frac{4}{3}\pi r^3$ です。
- (3) 相似比が $a : b$ のとき、面積比は $a^2 : b^2$ 、体積比は $a^3 : b^3$ であることを用います。

6.4 採点

【第6問 18点】

- (1) 6点
 - 断面から内接円の半径の議論に持ち込めたか。
- (2) 6点
 - 球の半径を用いて正しく計算できたか。
- (3) 6点
 - 相似比から面積比、体積比を正しく計算できたか。