確　認　試　験　問　題

二 次 関 数

解　答　例　・　解　説

試験時間： 90 分

問題数： 5 問

配点： 100 点

最終改訂日：2025/03/05

1　第 1 問：二次関数の頂点と位置関係

1.1　問題

a を実数とする。関数

$$f(x) = 2x^2 + 2ax + a^2 - a - 6$$

を定義し，座標平面上に，放物線 C；$y = f(x)$ を描く。

(1)　C の頂点の座標を a で表せ。

(2)　C の頂点の y 座標を $Y(a)$ とする。a が実数全体を動くとき，$Y(a)$ の最小値を求めよ。

(3)　C が x 軸と接するとき，a の値を求めよ。

1.2　解答

(1)　$f(x)$ を x について平方完成する。

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 2ax + a^2 - a - 6 \\ &= 2\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} - a - 6 \end{aligned}$$

よって，C の頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{2} - a - 6\right)$$

である。

(2)　(1) より，

$$Y(a) = \frac{a^2}{2} - a - 6$$

である。$Y(a)$ を a について平方完成すると，

$$Y(a) = \frac{1}{2}\left(a - 1\right)^2 - \frac{13}{2}$$

となる。従って，$Y(a)$ の最小値は

$$Y(1) = -\frac{13}{2}$$

である。

(3)　C が x 軸と接するとき，頂点の y 座標 $Y(a)$ が 0 であればよく，$Y(a) = 0$ を a について表すと，

$$\frac{a^2}{2} - a - 6 = 0$$

である。この両辺を 2 倍すると

$$a^2 - 2a - 12 = 0$$

となり，解の公式を用いると

$$a = 1 \pm \sqrt{13}$$

が得られる。これが求めるべき a の値である。

1.3　解説

座標平面上で二次関数が描く曲線を放物線と呼びます。物を投げたときの軌道と一致するためです。詳しくは物理で学習します。

二次関数 $y=a(x-p)^2+q$ が座標平面上で描く放物線は，$y=ax^2$ を x の正の方向へ p，y の正の方向へ q 平行移動させたもので，軸の方程式は $x=p$，頂点の座標は $(p,\ q)$ となります。一般に，$y=f(x)$ のグラフを x 方向に p，y 方向に q 平行移動したグラフの方程式は $y-q=f(x-p)$ と表されます。二次関数のグラフはその軸について線対称です。$a>0$ のときグラフは下に凸，$a<0$ のときはグラフは上に凸であるといいます。

二次関数は $y=ax^2+bx+c$ のような形で与えられることもありますが，そのような場合に軸の方程式や頂点の座標を調べるときは平方完成という作業を用います。

$$ax^2+bx+c$$

$$\downarrow$$

$$a\,(x+\ldots) \qquad (a\text{ で括る})$$

$$\downarrow$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \qquad (b\text{ を }2a\text{ で割る})$$

$$\downarrow$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a} \qquad (\text{括弧の中の余計な定数の 2 乗部分を引く})$$

$$\downarrow$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \qquad (\text{残った定数 }c\text{ を足す})$$

$$\downarrow$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

これで，$y=ax^2+bx+c$ は軸の方程式 $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点の座標 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$ であることが分かります。

平方完成は，基本的には 2 次方程式の解の公式を導くときと同じ操作をしているため，判別式 b^2-4ac が式中に出てくるなど，馴染みのある式かもしれません。

(1)　平方完成して頂点の座標を求める問題。二次関数の問題の殆どがこの操作から始まるといっても過言ではありません。

(2)　二次関数を平方完成して出てきた頂点の y 座標が a の二次関数となっており，さらに平方完成をする必要があります。グラフは下に凸であるため，a で整理したときの頂点で最小値を取ることになります。

(3)　二次関数の放物線が x 軸に接するとき，頂点の y 座標が 0 です。グラフを描いて視覚的に理解しましょう。

1.4　採点

【第 1 問　16 点】

(1)　4 点

(2)　6 点

- 平方完成できたか。それを用いて最小値の議論ができたか。

(3)　6 点

- 条件から立式できたか。方程式を解けたか。

2　第 2 問：二次関数の移動と決定

2.1　問題

座標平面上に与えられた放物線について考える。以下の問いに答えよ。

(1)　ある放物線 A を x 軸方向に $\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{3}{2}$ 平行移動した放物線の方程式は $y=-2x^2+6x+8$ で表される。A の方程式を求めよ。

(2)　放物線 B は，放物線 $y=3x^2+5x-1$ を原点に関して対称移動したものだという。B の方程式を求めよ。

(3)　軸が y 軸と平行である放物線 C は，3 点 $(-2,\ 3)$，$(2,\ -1)$，$(4,\ -9)$ を通る。C の方程式を求めよ。

2.2　解答

(1)　放物線 A は，放物線

$$\begin{aligned} y &= -2x^2+6x+8 \\ &= -2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{2} \end{aligned}$$

を x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $-\dfrac{3}{2}$ 平行移動したもので，頂点は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{25}{2}\right)$ から $(1,\ 11)$ に移る。従って，A の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2+11 \\ &= -2x^2+4x+9 \end{aligned}$$

である。

(2)　放物線 $y=3x^2+5x-1$ を原点に関して対称移動すると，その方程式は

$$-y=3(-x)^2+5(-x)-1$$

となる。整理して

$$y=-3x^2+5x+1$$

であり，これが B の方程式である。

(3)　C の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とする。3 点 $(-2,\ 3)$，$(2,\ -1)$，$(4,\ -9)$ の値はこの方程式を満たすから，それぞれ代入して

$$\begin{cases} 4a-2b+c=3 & (2.1) \\ 4a+2b+c=-1 & (2.2) \\ 16a+4b+c=-9 & (2.3) \end{cases}$$

が成り立つ。(2.1)−(2.2)で a と c を消去すると，

$$-4b=4$$

となり $b=-1$ を得る。また，(2.3)−(2.2)より

$$12a+2b=-8$$

から $a=-\dfrac{1}{2}$ を得る。(2.1)に a，b を代入して $c=3$ を得る。

ゆえに，C の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}x^2-x+3$$

である。

2.3　解説

(1)　平行移動によってグラフの形状は変わらないことと，二次関数が描く放物線の形状は，x^2 の係数によって決定することに注意しましょう。平行移動したグラフが分かっている場合，もとのグラフは逆方向に平行移動すれば得られます。

(2)　$y=f(x)$ のグラフを x 軸について対称移動したものは $-y=f(x)$，y 軸について対称移動したものは $y=f(-x)$，原点に関して対称移動したものは $-y=f(-x)$ となります。例えば x 軸についての対称移動で y の値が変わるのがややこしいですが，少し付け足して，「x 軸について対称移動する場合，x の値は保持され y の符号が反転する。」というように理解すると良いです。

(3)　$y=ax^2+bx+c$ とおいて 3 元連立 1 次方程式を解く，基本的な問題です。今回は，3 式から式同士の足し算引き算を行い，2 元連立 1 次方程式を導き出すことで解きます。

2.4　採点

【第 2 問　17 点】

(1)　5 点

- 移動前と後について，軸や頂点の位置を把握できたか。

(2)　5 点

- 原点に関する対称移動を式に変換できたか。方程式を求められたか。

(3)　7 点

- 連立方程式を立式できたか。それを解いて方程式を求められたか。

3　第 3 問：二次関数の最大・最小

3.1　問題

a を実数とする。関数

$$f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 4a + 5$$

の，区間 $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値を $M(a)$，最小値を $m(a)$ と表す。

(1)　$a = 1$ の場合を考える。$M(1)$ と $m(1)$ を求めよ。

(2)　$M(a)$ を a で表せ。

(3)　$m(a)$ を a で表せ。

(4)　$M(a) - m(a) = 12$ となるときの a の値を求めよ。

3.2　解答

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2(a+1)x + 4a + 5 \\ &= \{x - (a+1)\}^2 - a^2 + 2a + 4 \end{aligned}$$

より，放物線 $y = f(x)$ の軸の方程式は $x = a + 1$ である。以下の図では $p = a + 1$ とする。また，

$$\begin{aligned} f(-1) &= 6a + 8 \\ f(3) &= -2a + 8 \\ f(a+1) &= -a^2 + 2a + 4 \end{aligned}$$

である。

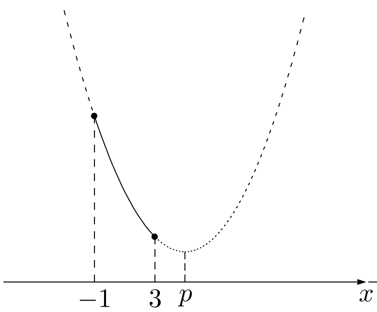

図 3.1

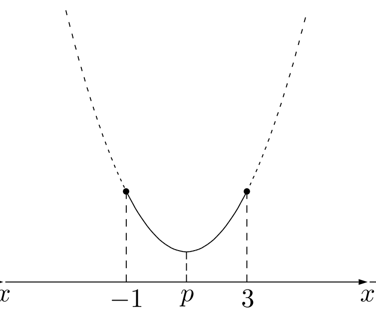

図 3.2

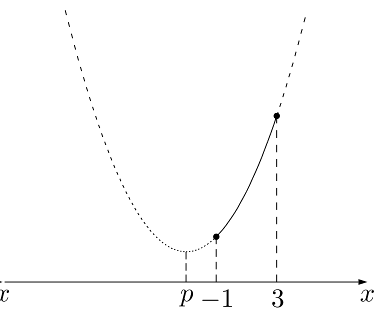

図 3.3

(1)　$a = 1$ のとき，

$$f(x) = (x-2)^2 + 5$$

である。従って，最大値 $M(1)$ は

$$M(1) = f(-1) = 14$$

最小値 $m(1)$ は

$$m(1) = f(2) = 5$$

である。

(2)　$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき，グラフと定義域は図 3.3 のようになる。最大値は $f(3)$ である。

$a+1 \geqq 1$ すなわち $a \geqq 0$ のとき，グラフと定義域は図 3.1 のようになる。最大値は $f(-1)$ である。

以上より，$M(a)$ は次のようになる。

$$M(a) = \begin{cases} -2a+8 & (a<0 \text{ のとき}) \\ 6a+8 & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3.1}$$

(3)　$-1 \geqq a+1 \leqq 3$ すなわち $-2 \leqq a \leqq 2$ のとき，グラフと定義域は図 3.2 のようになる。最小値は $f(a+1)$ である。

$a+1<-1$ すなわち $a<-2$ のとき，グラフと定義域は図 3.3 のようになる。最小値は $f(-1)$ である。

$a+1>3$ すなわち $a>2$ のとき，グラフと定義域は図 3.1 のようになる。最小値は $f(3)$ である。

以上より，$m(a)$ は次のようになる。

$$m(a) = \begin{cases} 6a+8 & (a<-2 \text{ のとき}) \\ -a^2+2a+4 & (-2 \leqq a \leqq 2 \text{ のとき}) \\ -2a+8 & (a>2 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3.2}$$

(4)　(3.1)，(3.2)より，

$$M(a)-m(a) = \begin{cases} -8a & (a<-2 \text{ のとき}) \\ a^2-4a+4 & (-2 \leqq a < 0 \text{ のとき}) \\ a^2+4a+4 & (0 \leqq a < 2 \text{ のとき}) \\ 8a & (2 \leqq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。この 4 つの場合それぞれについて，

$$M(a)-m(a) = 12 \tag{3.3}$$

を考える。

(i)　$a<-2$ のとき，(3.3)を a で表すと

$$-8a = 12$$

であり，これを解いて $a=-\dfrac{3}{2}$ となるが，この値は $a<-2$ の範囲に含まれないため不適。

(ii)　$-2 \leqq a < 0$ のとき，(3.3)は

$$a^2-4a+4=12$$

であり，これを解いて $a=2\pm 2\sqrt{3}$ となる。この解のうち，$-2 \leqq a < 0$ を満たすのは $a=2-2\sqrt{3}$ である。

(iii)　$0 \leqq a < 2$ のとき，(3.3)は

$$a^2 + 4a + 4 = 12$$

であり，これを解いて $a = -2 \pm 2\sqrt{3}$ となる。この解のうち，$0 \leqq a < 2$ を満たすのは $a = -2 + 2\sqrt{3}$ である。

(iv)　$2 < a$ のとき，(3.3)は

$$8a = 12$$

であり，これを解いて $a = \dfrac{3}{2}$ となるが，この値は $2 < a$ の範囲に含まれないため不適。

以上より，求めるべき a の値は

$$a = 2 - 2\sqrt{3} \quad \text{または} \quad a = -2 + 2\sqrt{3}$$

である。

3.3　解説

この分野での一番の山場，二次関数の最大値，最小値問題です。主に範囲が動く問題，グラフが動く問題があり，今回はグラフが動く問題に該当します。

2 次関数 $y = f(x) = a(x-p)^2 + q$ の $s \leqq x \leqq t$ における最大値，最小値を考えるとき，次のようになります。

(a)　$a > 0$ のとき，最大値は範囲の端 $x = s$ または $x = t$ でとり，最小値は範囲の端 $x = s$，$x = t$ または $x = p$ が範囲に入っている場合 $x = p$ でとる。

(b)　$a < 0$ のとき，最大値は範囲の端 $x = s$，$x = t$ または $x = p$ が範囲に入っている場合 $x = p$ で，最小値は範囲の端 $x = s$ または $x = t$ のどちらかでとる。

どの場合にせよ，最大値や最小値をとる x の値は，範囲の端 s，t か頂点の p となり，3 パターンしか存在しないことに気をつけると整理しやすくなります。

(1)　軸の方程式が $x = 2$ であることが平方完成によって分かります。この値 2 は頂点の x 座標でもあります。範囲 $-1 \leqq x \leqq 3$ に頂点が含まれていることを考え，最小値は $x = 2$ のときであると分かります。また，放物線は軸 $x = 2$ に関して対称であるため，$x = 2$ からより遠い（差の大きい）$x = -1$ で最大値をとります。

(2)　2 次の係数が正である，下に凸な二次関数のグラフを考えているため，最大値は範囲の端 $x = -1$，$x = 3$ のどちらかでとります。軸，頂点の x 座標である $x = a + 1$ がちょうど範囲の真ん中 $x = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ にあるときに図 3.2 のように両端の高さが一致し，頂点がそれより左側にずれる（$a + 1 < 1$）と右端が，右側にずれる（$a + 1 > 1$）と左側が最大値をとることになります。等号はどちらにつけても構いません。

(3)　最小値は，頂点が入っている場合は頂点の y 座標が最小値になります。そうでない場合は図 3.1 や図 3.3 のように下がり続けるか上がり続けるグラフです。

(4)　最大値は，$a = 0$ のところで最大値を取る x の値が切り替わりました。最小値は，$a = -2$ と $a = 2$ のところで切り替わりました。よって，最大値引く最小値は，$a = -2$，$a = 0$，$a = 2$ のところで切り替わり 4 通りの表現になることが分かります。また，$M(a) - m(a) = 12$ を

解いた解が，場合分けした a の範囲に含まれているか確認するようにしましょう。例えば $-2 \leqq a < 0$ のときに方程式を解くと $a = 2 \pm 2\sqrt{3}$ を得ますが，$a = 2 + 2\sqrt{3}$ は正であり $-2 \leqq a < 0$ に含まれていないため除外することになります。解答では省略していますが，$1 < \sqrt{3} < 2$ であることを述べると丁寧です。

3.4　採点

【第 3 問　33 点】

(1)　6 点

- 最大値，最小値にそれぞれ 3 点。

(2)　10 点

- 場合分けを適切にできたか。それぞれの場合で最大値を求められたか。

(3)　10 点

- 場合分けを適切にできたか。それぞれの場合で最小値を求められたか。

(4)　7 点

- 各場合について a についての方程式を解けたか。それが場合分けの範囲に適しているか確認できたか。

4　第 4 問：2 次不等式

4.1　問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1)　次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 3 > 0 \\ x^2 \leqq 4(x+8) \end{cases}$$

(2)　a を実数とする。x についての 2 つの方程式

$$ax^2 + 4x + (a-1) = 0, \qquad 3x^2 - ax + a = 0$$

が共に実数解を持つとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

4.2　解答

(1)　(i)　1 式目

$$x^2 - 6x - 3 > 0$$

の左辺を因数分解し，

$$\{x - (3 - 2\sqrt{3})\}\{x - (3 + 2\sqrt{3})\} > 0$$

を解いて，

$$x < 3 - 2\sqrt{3} \quad \text{または} \quad 3 + 2\sqrt{3} < x \tag{4.1}$$

である。

(ii)　2 式目

$$x^2 \leqq 4(x+8)$$

を移項，展開して

$$x^2 - 4x - 32 \leqq 0$$

となる。左辺を因数分解して

$$(x+4)(x-8) \leqq 0$$

である。よってこれを解くと

$$-4 \leqq x \leqq 8 \tag{4.2}$$

となる。

(4.1)かつ (4.2)より

$$-4 \leqq x < 3 - 2\sqrt{3} \quad \text{または} \quad 3 + 2\sqrt{3} < x \leqq 8$$

が解となる。

(2)

$$ax^2 + 4x + (a-1) = 0 \tag{4.3}$$

$$3x^2 - ax + a = 0 \tag{4.4}$$

とする。$a = 0$ のとき，(4.3)は $4x - 1 = 0$，(4.4)は $3x^2 = 0$ であるから，共に実数解を持つ。$a \fallingdotseq 0$ のとき，両式は 2 次方程式であり，共に実数解を持つ条件として，判別式が 0 以上である条件を考えれば良く，その条件は

$$\begin{cases} 4 - a(a-1) \geqq 0 & (4.5) \\ a^2 - 12a \geqq 0 & (4.6) \end{cases}$$

である。

(i)　(4.5)を解く。この左辺を整理して $a^2 - a - 4 \leqq 0$ となるから，これを解いて

$$\frac{1-\sqrt{17}}{2} \leqq a \leqq \frac{1+\sqrt{17}}{2} \quad (a \fallingdotseq 0)$$

となる。

(ii)　(4.6)を解く。この左辺を因数分解して $a(a-12) \geqq 0$ となるから，これを解いて

$$a \leqq 0 \quad \text{または} \quad 12 \leqq a \quad (a \fallingdotseq 0)$$

となる。

$a = 0$ のときと (i) かつ (ii) より，求めるべき a の範囲は

$$\frac{1-\sqrt{17}}{2} \leqq a \leqq 0$$

である。

4.3　解説

p，q を $p < q$ を満たす実数，r を正の実数として，2 次不等式の解の例です。

(1)　$a > 0$ のとき，x についての不等式の解は次のようになる。

(i)　$a(x-p)(x-q) \geqq 0$ の解は，$a \leqq p$ または $q \leqq a$.

(ii)　$a(x-p)(x-q) > 0$ の解は，$a < p$ または $q < a$.

(iii)　$a(x-p)(x-q) \leqq 0$ の解は，$p \leqq a \leqq q$.

(iv)　$a(x-p)(x-q) < 0$ の解は，$p < a < q$.

(v)　$a(x-p)^2 \geqq 0$ の解はすべての実数.

(vi)　$a(x-p)^2 > 0$ の解は $x \fallingdotseq p$.

(vii)　$a(x-p)^2 \leqq 0$ の解は $x = p$.

(viii)　$a(x-p)^2 < 0$ の解は無し.

(ix)　$a(x-p)^2 + r \geqq 0$ や $a(x-p)^2 + r > 0$ の解はすべての実数.

(x)　$a(x-p)^2 + r \leqq 0$ や $a(x-p)^2 + r < 0$ の解は無し.

(2)　$a < 0$ のとき，x についての不等式の解は次のようになる。

(i)　$a(x-p)(x-q) \geqq 0$ の解は，$p \leqq a \leqq q$.

(ii)　$a(x-p)(x-q) > 0$ の解は，$p < a < q$.

(iii)　$a(x-p)(x-q) \leqq 0$ の解は，$a \leqq p$ または $q \leqq a$.

(iv)　$a(x-p)(x-q) < 0$ の解は，$a < p$ または $q < a$.

(v)　$a(x-p)^2 \geqq 0$ の解は $x = p$.

(vi)　$a(x-p)^2 > 0$ の解は無し.

(vii)　$a(x-p)^2 \leqq 0$ の解はすべての実数.

(viii)　$a(x-p)^2 < 0$ の解は $x \fallingdotseq p$.

(ix)　$a(x-p)^2 - r \geqq 0$ や $a(x-p)^2 - r > 0$ の解は無し.

(x)　$a(x-p)^2 - r \leqq 0$ や $a(x-p)^2 - r < 0$ の解はすべての実数.

色々と列挙されていますが，全てを機械的に覚えるようなものではありません。どれも，グラフを実際に描いてみて，位置関係で解を把握すると良いです。また，$a < 0$ の場合は不等式の両辺を -1 倍することで $a > 0$ の場合で考えることができます。

代表例として，(ii)，(iv) の解の形は覚えておきましょう。今回の問題でも使います。また，解は必ずしも不等式の形をしているとは限らず，解がすべての実数，解無し，$x = p$，$x \fallingdotseq p$ のようになる場合があることを念頭に置いておきましょう。

(1)　$x^2 - 6x - 3$ は整数係数範囲で因数分解できないため，解の公式を使うことになります。$x^2 - 6x - 3 = 0$ の解は $x = 3 \pm 2\sqrt{3}$ であるため，$y = x^2 - 6x - 3$ のグラフは x 軸と $x = 3 \pm 2\sqrt{3}$ のときに交わることが分かります。

(2)　問題文で，2 次方程式とは言っていないことに注意します。前者の方程式は $a = 0$ のときに 2 次方程式ではなくなるため，判別式を使えません。したがって $a = 0$ のときだけ別に考える必要があります。

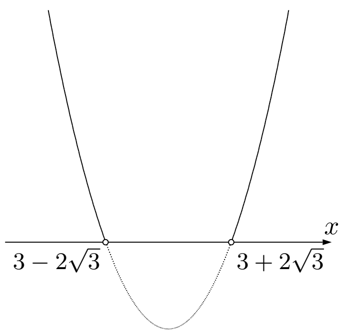

図 4.1: (1) $y = x^2 - 6x - 3$

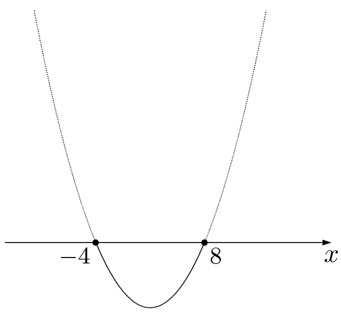

図 4.2: (1) $y = x^2 - 4x - 32$

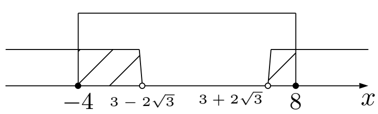

図 4.3: (1) 共通部分

4.4　採点

【第 4 問　14 点】

(1)　7 点

- 2 式それぞれの解の導出，その組み合わせ，不等号の有無に注意する。

(2)　7 点

- $a = 0$ のときの場合分けができたか。判別式 0 以上から不等式の導出，最終的な解の導出ができたか。

5　第 5 問：放物線と直線の共有点の持ち方

5.1　問題

a を 0 でない実数の定数とし，座標平面上に，2 つの放物線を次のように定める。

$C:\quad y=-x^2+2ax-2a^2+2a$

$D:\quad y=ax^2+(3-2a)x-a$

(1)　C が x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　C が x 軸の正の部分，負の部分それぞれで 1 点ずつ交わるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　D が x 軸の $-1<x<0$ の部分と 1 点，$2<x<3$ の部分と 1 点でそれぞれ交わるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

5.2　解答

C を平方完成すると次の通り。

$y=-(x-a)^2-a^2+2a$

よって，C の軸の方程式は $x=a$，頂点の y 座標は $-a^2+2a$ である。

(1)　C は上に凸であるから，C が x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるのは，C の軸が x の正の部分にあり，頂点の y 座標が正で，y 切片が負のときである。これらを式で表すと

$$\begin{cases} a>0 \\ -a^2+2a>0 \\ -2a^2+2a<0 \end{cases}$$

となり，それぞれを解いて

$$\begin{cases} a>0 \\ 0<a<2 \\ a<0 \quad \text{または} \quad 1<a \end{cases}$$

を得る。従って，求める a の範囲は

$1<a<2$

である。

(2)　C は上に凸であるから，$x=0$ のときの y の値すなわち y 切片が正となる条件を考えれば良い。これを式で表すと

$-2a^2+2a>0$

であり，これを解くと

$0<a<1$

となる。これが求める a の範囲である。

(3)　$f(x) = ax^2 + (3-2a)x - a$ とする。題意を満たす条件は，

$$f(-1)f(0) < 0 \quad かつ \quad f(2)f(3) < 0$$

である。

(i)　$f(-1)f(0) < 0$ を a の式で表すと

$$(2a-3)(-a) < 0$$

であり，これを解いて

$$a < 0 \quad または \quad \frac{3}{2} < a$$

を得る。

(ii)　$f(2)f(3) < 0$ を a の式で表すと

$$(6-a)(2a+9) < 0$$

であり，これを解いて

$$a < -\frac{9}{2} \quad または \quad 6 < a$$

を得る。

(i) かつ (ii) より，求める a の範囲は

$$a < -\frac{9}{2} \quad または \quad 6 < a$$

である。

5.3　解説

放物線と直線が共有点をどのように持つかの問題です。条件を満たすグラフを描いて条件を式に変換していくことで解きます。どこに注意して立式していけばよいか，だいたいパターンが決まっているため，ある程度問題演習を通して問題と解答をグループ分けすることをお勧めします。

今回は $a \fallingdotseq 0$ が問題にて設定されているため，D は 2 次式で確定します。最高次数が 0 になるかどうかは，場合分けが発生するため，常に注意しておきましょう。また，解答の際に $a = 0$ が含まれないように確認する必要があります。

(1)　x 軸と異なる 2 点で交わることから，頂点の y 座標に着目し，しかも x 軸の正の部分（$x > 0$）ということで，軸の位置と境界部分 $x = 0$ での値がどうなっているかを調べます。

(2)　$x < p$ のときと $x > p$ の両方で交点というとき，$x = p$ のときの値について条件を考えればよいです。条件が 1 つしか出ない解きやすい問題です。

(3)　実際に放物線を描いてみると，上に凸にしろ下に凸にしろ，-1 から 0 の間で 1 回 y 座標の正負が入れ替わり，2 から 3 の間で更に 1 回正負が入れ替わっていることが分かるため，掛けて負になるという条件に変換できます。

5.4　採点

【第 5 問　20 点】

(1)　7 点

- 正しく条件である不等式を立式できたか。それぞれの不等式を解けたか。全ての条件をまとめて解を得られたか。

(2)　6 点

- 立式できたか。不等式を解けたか。

(3)　7 点

- 立式できたか。不等式を解けたか。それぞれの不等式の解をまとめられたか。