
確 認 試 験 問 題

数 と 式

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 5 問

配点： 100 点

最終改訂日：2025/03/05

1 第1問：式の展開と因数分解

1.1 問題

問い A, B に答えよ。

A

以下の式 (1) ～ (6) をそれぞれ展開せよ。

(1) $(4x + 3y)(3x - 5y)$

(2) $(2x - 3y)^3$

(3) $(a + b)(a^4 + b^4)(a - b)(a^2 + b^2)$

(4) $(a - b + c)(a + b - c)$

(5) $(x + 2y + 4z)^2$

(6) $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

B

以下の式 (7) ～ (14) をそれぞれ因数分解せよ。

(7) $4x^2 - 14xy + 6y^2$

(8) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$

(9) $5p^3q - 40q^4$

(10) $12x^2 - 73x + 48$

(11) $3mn - m + 6n^2 - 5n + 1$

(12) $15x^2 + 26xy - 21y^2 - 22x - 22y + 8$

(13) $a^3 + 2a^2c - ab^2 + ac^2 - b^2c - bc^2 - abc$

(14) $27a^3 + 54a^2z + 36az^2 + 8z^3$

1.2 解答

A

(1)

$$\begin{aligned}(4x + 3y)(3x - 5y) &= 4x(3x - 5y) + 3y(3x - 5y) \\ &= 12x^2 - 20xy + 9xy - 15y^2 \\ &= 12x^2 - 11xy - 15y^2\end{aligned}$$

(2)

$$(2x - 3y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot (3y) + 3 \cdot (2x) \cdot (3y)^2 - (3y)^3$$

$$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

(3)

$$\begin{aligned}(a+b)(a^4+b^4)(a-b)(a^2+b^2) &= (a+b)(a-b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \\ &= (a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \\ &= (a^4-b^4)(a^4+b^4) \\ &= a^8-b^8\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(a-b+c)(a+b-c) &= \{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\} \\ &= a^2-(b-c)^2 \\ &= a^2-b^2-c^2+2bc\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}(x+2y+4z)^2 &= x^2+(2y)^2+(4z)^2+2x\cdot(2y)+2\cdot(2y)\cdot(4z)+2\cdot(4z)\cdot x \\ &= x^2+4y^2+16z^2+4xy+16yz+8zx\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) &= x(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^4+x^3+x^2+x+1) \\ &= x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^4-x^3-x^2-x-1 \\ &= x^5-1\end{aligned}$$

B

(7)

$$4x^2-14xy+6y^2=2(2x^2-7xy+3y^2)=2(2x-y)(x-3y)$$

(8)

$$\begin{aligned}(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3 &= \{(x^2-2x)+1\}\{(x^2-2x)-3\} \\ &= (x-1)^2(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}5p^3q-40q^4 &= 5q(p^3-8q^3) \\ &= 5q\{p^3-(2q)^3\} \\ &= 5q(p-2q)(p^2+2pq+4q^2)\end{aligned}$$

(10)

$$12x^2-73x+48=(4x-3)(3x-16)$$

(11)

$$\begin{aligned}
 3mn - m + 6n^2 - 5n + 1 &= (3n - 1)m + 6n^2 - 5n + 1 \\
 &= (3n - 1)m + (3n - 1)(2n - 1) \\
 &= (3n - 1)(m + 2n - 1)
 \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
 15x^2 + 26xy - 21y^2 - 22x - 22y + 8 \\
 &= 15x^2 + 26xy - 22x - (21y^2 + 22y - 8) \\
 &= 15x^2 + 26xy - 22x - (7y - 2)(3y + 4) \\
 &= (3x + 7y - 2)(5x - 3y - 4)
 \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
 a^3 + 2a^2c - ab^2 + ac^2 - b^2c - bc^2 - abc \\
 &= (a - b)c^2 + (2a^2 - b^2 - ab)c + a^3 - ab^2 \\
 &= (a - b)c^2 + (a - b)(2a + b)c + a(a + b)(a - b) \\
 &= (a - b)\{c^2 + (2a + b)c + a(a + b)\} \\
 &= (a - b)(a + b + c)(a + c)
 \end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
 27a^3 + 54a^2z + 36az^2 + 8z^3 \\
 &= (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2(2z) + 3 \cdot (3a)(2z)^2 + (2z)^3 \\
 &= (3a + 2z)^3
 \end{aligned}$$

1.3 解説

式の計算に関する次の法則を前提に計算をします。

加法の交換法則 $A + B = B + A$

加法の結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$

乗法の交換法則 $AB = BA$

乗法の結合法則 $(AB)C = A(BC)$

分配法則 $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$

式の展開と因数分解には、代表的には次の式が挙げられます。各式の左辺から右辺に変形する操作を展開、右辺から左辺に変形する操作を因数分解といいます。

$$[1] \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$[2] \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$[3] \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$[4] \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$[5] \quad (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

$$[6] \quad (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$[7] \quad (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$[8] \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$[9] \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

特に [2], [9] は, [1], [8] においてそれぞれ b に $-b$ を代入したものであるため, 別々に覚える必要はありません。

また, 因数分解の際には次の事柄に気をつけながら行います。

- 最初に共通する因数を括りだす。
 - 次数の低い文字について整理する。
 - 各文字の次数が同じ場合は, 1 つの文字について整理する。
- (1) [5] を用いることができますが, この式に値を代入するよりは, 分配法則を適用して展開すると良いです。
 - (2) [9] が使えます。
 - (3) 乗法の交換法則, 結合法則より積の順番を入れ替えられるので, 和と差の積 [3] を用いられるように整理します。和と差の積を全部で 3 回用いることになります。
 - (4) 和と差の積 [3] を用いられるように整理すると計算量を減らせますが, 分配法則を適用してもそれほど計算が複雑にはなりません。
 - (5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ は, $\{a+(b+c)\}^2$ として計算することで得られます。この計算結果は有名な事実で, 覚えておくと便利です。
 - (6) 発展として, $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1$ が自然数 n で成り立ちます。今回は $n=5$ の場合。特に $n=3$ の場合 $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$ は [7] の a に x を, b に 1 を代入したときと同じです。
 - (7) 各項の係数が偶数 (2 の倍数) であるため, 先に 2 で括り, [5] を適用。たすき掛けを行います。
 - (8) $x^2 - 2x$ が複数回分かりやすく登場しているので, それを t とおいてしまうと良いです。 $t^2 - 2t - 3$ が現れるので因数分解し, t とおいた x の式を戻してさらに因数分解を実行します。
 - (9) 共通因数の $5q$ で括ると, [7] が使えます。
 - (10) [5] が対応し, たすき掛けを行います。12 の約数と 48 の約数は数が多く, 組み合わせを考えるのが大変ですが, 1 次の項の係数は -73 と奇数であるため, 奇数かける奇数が必要であることに注意すれば候補を絞り込むことができます。

$$\begin{array}{rclcl} 4 & \times & -3 & \rightarrow & -9 \\ 3 & \times & -16 & \rightarrow & -48 \\ & & & & \hline & & & & -57 \end{array}$$

- (11) m の次数は 1, n の次数は 2 であるため, 次数の低い m について整理すると簡潔に計算でき

ます。

- (12) たすき掛けを2回行う典型問題です。 x の式として整理した場合、定数項の y の式をたすき掛けを用いて因数分解し、さらにたすき掛けを用います。マイナスをつける場所も選択肢があることに注意します。

$$\begin{array}{rcl} 7 & \times & -2 \longrightarrow -6 \\ 3 & & 4 \longrightarrow \frac{28}{22} \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 3 & \times & 7y-2 \longrightarrow 35y-10 \\ 5 & & -(3y+4) \longrightarrow \frac{-9y-12}{26y-22} \end{array}$$

- (13) a が3次式、 b と c が2次式なので、 b か c で整理すると簡潔です。
- (14) [8]が使えます。1, 8, 27, 64などは整数の3乗であり、3乗を含む因数分解の問題の係数として現れやすいです。

1.4 採点

【第1問 28点】

- (1)～(14)各2点。それぞれ完答で得点とする。

2 第2問：数値の計算

2.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 循環小数 $0.\dot{7}1\dot{7} = 0.717717\cdots$ を分数の形で表せ。
- (2) 式 $(\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{8})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8})$ を計算せよ。
- (3) 式 $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ の分母を有理化せよ。
- (4) 実数 $\frac{1}{4 - \sqrt{13}}$ を整数部分と小数部分に分ける。整数 a と $0 \leq b < 1$ を満たす実数 b を用いて
- $$\frac{1}{4 - \sqrt{13}} = a + b$$
- と表されるとき、 a , b の値を求めよ。
- (5) 実数 $\sqrt{16 - 8\sqrt{15}}$ を計算し、二重根号を用いない式で表現する。整数 p , q を用いて
- $$\sqrt{16 - 8\sqrt{15}} = \sqrt{p} - \sqrt{q}$$
- と表されるとき、 p , q の値を求めよ。
- (6) $x = \frac{1}{\sqrt{7} - 2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{7} + 2}$ とする。このとき、5つの式
- $$x + y, \quad xy, \quad x^2 + y^2, \quad x^3 + y^3, \quad \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$
- の値を求めよ。

2.2 解答

- (1) $x = 0.\dot{7}1\dot{7}$ とする。 x とその 1000 倍の差を取ると、

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0.7177177717\cdots \\ -) & 1000x & = 717.7177177717\cdots \\ \hline -999x & = & -717 \end{array}$$

となり、 $x = \frac{-717}{-999} = \frac{239}{333}$ を得る。

- (2)

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{8})(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{8}) \\ &= \{\sqrt{3} - (\sqrt{5} - \sqrt{8})\}\{\sqrt{3} + (\sqrt{5} - \sqrt{8})\} \\ &= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5} - \sqrt{8})^2 \\ &= 3 - 5 + 2\sqrt{5 \cdot 8} - 8 \\ &= -10 + 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

(4) 与式を A とし、この分母を有理化すると

$$\frac{1}{4-\sqrt{13}} = \frac{4+\sqrt{13}}{(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13})} = \frac{4+\sqrt{13}}{16-13} = \frac{4+\sqrt{13}}{3}$$

となる。 $3^2 < 13 < 4^2$ より $3 < \sqrt{13} < 4$ だから、

$$2 < \frac{4+3}{3} < \frac{4+\sqrt{13}}{3} < \frac{4+4}{3} < 3$$

と評価でき、 A の整数部分 a は $a=2$ であることが分かる。 A の小数部分は A から A の整数部分を引いたものだから、

$$b = A - a = \frac{4+\sqrt{13}}{3} - 2 = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$$

である。

(5)

$$\begin{aligned}
\sqrt{16-8\sqrt{15}} &= \sqrt{16-2\sqrt{60}} \\
&= \sqrt{(10+6)-2\sqrt{10 \cdot 6}} \\
&= \sqrt{(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2} \\
&= |\sqrt{10}-\sqrt{6}| \\
&= \sqrt{10}-\sqrt{6}
\end{aligned}$$

より $p=10$, $q=6$ である。

(6) まず、

$$\begin{aligned}
x+y &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} + \frac{1}{\sqrt{7}+2} = \frac{(\sqrt{7}+2)+(\sqrt{7}-2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \frac{2\sqrt{7}}{3} \\
xy &= \frac{1}{\sqrt{7}-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}+2} = \frac{1}{7-2^2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

である。これらを用いると、

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = \left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{28}{9} - \frac{2}{3} = \frac{22}{9} \\
x^3+y^3 &= (x+y)(x^2-xy+y^2) = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \{(x^2+y^2)-xy\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \left(\frac{22}{9} - \frac{1}{3} \right) = \frac{38\sqrt{7}}{27}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{\frac{22}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{22}{9} \cdot 9}{\frac{1}{3} \cdot 9} = \frac{22}{3}$$

である。

2.3 解説

- (1) 717 の 3 桁が繰り返される循環小数です。 $10^3 = 1000$ を掛けると、3 桁ずれることにより小数点以下が同じ数が現れるため、それらの差を取ることで循環する部分を消すことができます。
- (2) 和と差の積を用いて計算していますが、順番に展開しても良いです。
- (3) 根号は、全体を 2 乗することで取り払うことができます。和と差の積 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を活用できます。
- (4) $n \leq x < n+1$ を満たす整数 n を探します。(例： $5 \leq x < 6$ を満たす x の整数部分は 5 である。) 分母に根号を含む数があると大小関係と比較しづらいため、和と差の積による分母の有理化を行います。
- (5) 根号の中身を平方の形式にし、 $\sqrt{x^2} = |x|$ を用います。

$$(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2 = p + q - 2\sqrt{pq}$$

であり、これと $16 - 8\sqrt{15} = 16 - 2\sqrt{60}$ を比較すると、 $p + q = 16$, $pq = 60$ を満たす p , q は 6 と 10 の組み合わせになります。根号の付いた値は 0 以上であるため、 $p = 6$, $q = 10$ としないように注意します。

- (6) $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ は、 x に y , y に x を入れても同じ式になります。このような式を対称式と言います。 x と y の対称式を $x + y$, xy で表現することはよく行われます。

2.4 採点

【第2問 20点】

- (1) 3点
- (2) 3点
- (3) 3点
- (4) 3点
- (5) 3点
- (6) 5点

- 5式それぞれに1点。

3 第3問：2次方程式と絶対値を含む方程式

3.1 問題

以下の x についての方程式 (1) ~ (5) をそれぞれ解け。

- (1) $2x^2 - 15x + 7 = 0$
- (2) $|x + 1| + |x - 3| = 6$
- (3) $3x^2 - 3x - 10 = 0$
- (4) $(x^2 + 2x)^2 + 120 = 23(x^2 + 2x)$
- (5) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$

3.2 解答

- (1) 方程式を変形すると

$$(2x - 1)(x - 7) = 0$$

となるから、この解は

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad x = 7$$

である。

- (2) 方程式の左辺は

$$\begin{aligned} |x + 1| + |x - 3| &= \begin{cases} -(x + 1) - (x - 3) & (x < -1 \text{ のとき}) \\ (x + 1) - (x - 3) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ (x + 1) + (x - 3) & (3 < x \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2x + 2 & (x < -1 \text{ のとき}) \\ 4 & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 2x - 2 & (3 < x \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

と場合分けできる。

- (i) $x < -1$ のとき、 $-2x + 2 = 6$ を解いて $x = -2$ を得る。この解は $x < -1$ に含まれる。
- (ii) $-1 \leq x \leq 3$ のとき、方程式の左辺の値は 4 であり、右辺の値 6 とは等しくならない。
- (iii) $3 < x$ のとき、 $2x - 2 = 6$ を解いて $x = 4$ を得る。この解は $3 < x$ に含まれる。

以上より、解は

$$x = -2 \quad \text{または} \quad x = 4$$

である。

- (3) 2次方程式の解の公式を用いると、この方程式の解は次のように求められる。

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10)}}{2 \cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{129}}{6}$$

- (4) $x^2 + 2x = t$ とおくと、与えられた方程式は

$$t^2 + 120 = 23t$$

と表せられる。移項と因数分解を行い

$$(t - 8)(t - 15) = 0$$

と変形できる。 t を x の式に戻すと次のようになる。

$$(x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 15) = 0$$

この左辺を更に因数分解して

$$(x - 2)(x + 4)(x - 3)(x + 5) = 0$$

となる。ゆえに、この方程式の解は、

$$x = -5 \quad \text{または} \quad x = -4 \quad \text{または} \quad x = 2 \quad \text{または} \quad x = 3$$

である。

- (5) この方程式において $x = 0$ は解とはならないことは、方程式に $x = 0$ を代入しても等式が成り立たないことから分かる。よって $x \neq 0$ で考える。両辺を x^2 で割ると、

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

さらに変形して

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

となる。 $x + \frac{1}{x} = t$ とおくと、 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$ であるから、この方程式は

$$t^2 - 2 - 7t + 14 = 0$$

すなわち

$$(t - 4)(t - 3) = 0$$

と表すことができる。これを t についての方程式として解くと、

$$t = 3 \quad \text{または} \quad t = 4$$

である。

- (i) $t = 3$ のとき、 t を x の式に戻して

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

となるから、両辺に x をかけた

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

について、2次方程式の解の公式を用いて解くと $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。

- (ii) $t = 4$ のとき、 t を x の式に戻して

$$x + \frac{1}{x} = 4$$

となるから、両辺に x をかけた

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

について、2次方程式の解の公式を用いて解くと $x = 2 \pm \sqrt{3}$ である。

以上より、解は次のようになる。

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ または } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ または } x = 2+\sqrt{3} \text{ または } x = 2-\sqrt{3}$$

3.3 解説

2次方程式の多くは、「 $AB=0$ のとき、 $A=0$ または $B=0$ 」を用います。また、解の公式

- 0 でない実数 a と実数 b, c について、2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

である。

を場合によっては活用します。分数に $\pm$ がありますが、方程式の解 $x = s \pm t$ は、 $x = s+t$ または $x = s-t$ という意味です。

解の公式の特殊例として、次があります。1次の項の係数が偶数であるときに有用です。

- 0 でない実数 a と実数 b', c について、2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

である。

- (1) 左辺を因数分解して、因数のどちらかが0であるとして解を得ます。2つの解は「または」で繋がれていることに注意してください。
- (2) 絶対値を含む方程式で必要な作業は場合分けです。 $x+1$ と $x-3$ の値が0になり、その前後で正負が切り替わるのは x が $-1, 3$ のときです。両方が負になる $x < -1$ 、両方が正になる $x > 3$ 、 $x+1$ が正で $x-3$ が負になる $-1 < x < 3$ で場合分けしましょう。 $x+1$ の方が $x-3$ より必ず大きいため、 $x+1$ が負で $x-3$ が正となることはありません。場合分けの等号は必ずしも一意ではありません。例えば、 $x \leq -1$ のとき、 $-1 < x < 3$ のとき、 $3 \leq x$ のとき、のように書いても問題ありません。
- (3) 解の公式の利用。
- (4) 4次方程式ですが、 $x^2 + 2x$ というのが固まって2回出てきています。一度 t などと置いて、2次式に変換することで解きやすくなります。
- (5) x の4次方程式ですが、次数の高い方から順番に係数を見ていくと、 $1, -7, 14, -7, 1$ と回文（逆から見ても同じ）になっています。このような方程式を相反方程式と呼びます。今回は偶数次の方程式なので、 x の冪乗で割り、 $x + \frac{1}{x} = t$ とおくことで解くことができます。ちなみに奇数次の方程式は $x = -1$ を解に持つので、それを用いて因数分解をします。

3.4 採点

【第3問 20点】

- (1) ~ (5) 各4点。計算過程によっては、適宜部分点を与える。

4 第4問：1次不等式

4.1 問題

以下の x についての不等式 (1) ~ (4) をそれぞれ解け。ただし、 a は実数の定数とする。

$$(1) \quad \frac{3x-1}{2} - \frac{2-4x}{3} > \frac{3}{4}x + 1$$

$$(2) \quad \sqrt{(5x-2)^2} \leq x+3$$

$$(3) \quad x(a+1) - 2a^2 > 2a$$

$$(4) \quad -x-4 \leq 2x+1 < x+7$$

4.2 解答

(1) 与式の両辺に 12 をかけると、

$$6(3x-1) - 4(2-4x) > 9x+12$$

であり、整理して

$$25x > 26$$

となるから、 $x > \frac{26}{25}$ を解として得る。

(2) 左辺を x の値によって場合分けする。

$$\sqrt{(5x-2)^2} = |5x-2| = \begin{cases} 5x-2 & \left(x \geq \frac{2}{5} \text{ のとき} \right) \\ -5x+2 & \left(x < \frac{2}{5} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

(i) $x \geq \frac{2}{5}$ のとき、

$$5x-2 \leq x+3$$

を解いて $x \leq \frac{5}{4}$ であり、最初の条件と合わせて $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{5}{4}$ である。

(ii) $x < \frac{2}{5}$ のとき、

$$-5x+2 \leq x+3$$

を解いて $x \geq -\frac{1}{6}$ であり、最初の条件と合わせて $-\frac{1}{6} \leq x < \frac{2}{5}$ である。

以上より、 $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{5}{4}$ が解となる。

(3) 与えられた不等式を整理して因数分解すると

$$(x-2a)(a+1) > 0 \tag{4.1}$$

となる。

(i) $a+1=0$ すなわち $a=-1$ のとき、(4.1)の左辺の値は0となり、不等式は成り立たない。

(ii) $a+1>0$ すなわち $a>-1$ のとき、(4.1)の両辺を正の値 $a+1$ で割り、

$$x-2a > 0$$

より $x > 2a$ である。

(iii) $a + 1 < 0$ すなわち $a < -1$ のとき、(4.1)の両辺を負の値 $a + 1$ で割り、

$$x - 2a < 0$$

より $x < 2a$ である。

以上をまとめ、不等式の解は次のようになる。

$$\begin{cases} x > 2a & (a > -1 \text{ のとき}) \\ \text{解なし} & (a = -1 \text{ のとき}) \\ x < 2a & (a < -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4) 与えられた不等式 $A \leq B < C$ を、 $A \leq B$ と $B < C$ の2つに分ける。

$$(i) \quad -x - 4 \leq 2x + 1$$

$$(ii) \quad 2x + 1 < x + 7$$

(i) を解くと $x \geq -\frac{5}{3}$ である。(ii) を解くと $x < 6$ である。元の不等式はこの2つを同時に満たすから、解として (i) かつ (ii)、すなわち

$$-\frac{5}{3} \leq x < 6$$

を得る。

4.3 解説

不等式の基本的な性質

- $a < b$ のとき、 $a + c < b + c$.
- $a > b$ のとき、 $a + c > b + c$.

によって、不等式においても移項は方程式と同じようにすることができます。

また、両辺に0でない実数値を掛けることができますが、かける値が正か負かで不等号の向きが変わります。

- $a < b$ のとき、 $c > 0$ ならば $ac < bc$ 、 $c < 0$ ならば $ac > bc$.
- $a > b$ のとき、 $c > 0$ ならば $ac > bc$ 、 $c < 0$ ならば $ac < bc$.

(1) 移項と実数倍によって整理。

(2) $\sqrt{a^2} = |a|$ であることを用います。(i) と (ii) に場合分けしましたが、解は (i) または (ii) です。

(3) 式変形の過程は次の通り。

$$\begin{aligned} x(a+1) - 2a^2 &> 2a \\ \iff x(a+1) - 2a^2 - 2a &> 0 \\ \iff x(a+1) - 2a(a+1) &> 0 \\ \iff (x-2a)(a+1) &> 0 \end{aligned}$$

a の値によって不等式の向きが変わることに注意。不等式の両辺を実数値で割る場合は、常に

その正負を確認してください。

- (4) 2つの不等式に分けられますが、答えはその2つの共通解（「または」ではなく「かつ」）であることに注意します。

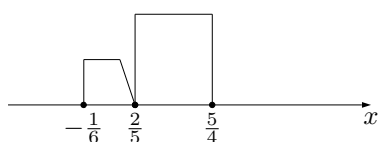


図 4.1: (2) : (i) または (ii)

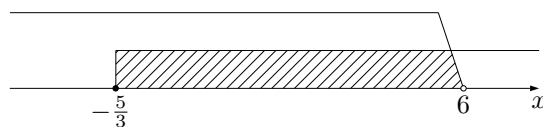


図 4.2: (4) : (i) かつ (ii)

4.4 採点

【第4問 16点】

- (1) ～ (4) 各4点。計算過程によっては、適宜部分点を与える。

5 第5問：方程式と不等式の応用

5.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) k を実数とする。2 次方程式 $2x^2 - 3x + k + 1 = 0$ の相異なる実数解の個数を調べよ。
- (2) x のとりうる値の範囲が $-1 \leq x < 2$ であり、 y のとりうる値の範囲が $4 < y \leq 6$ であるとき、 $x + y$ と $2x - y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) m を実数とする。 x についての 2 つの方程式

$$x^2 - (2m + 1)x + 3m = 0, \quad x^2 - 3mx + 5m - 2 = 0$$

の共通する実数解がただ 1 つ存在するとき、 m の値とその共通解を求めよ。

5.2 解答

- (1) この 2 次方程式の判別式 D を計算すると、

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k + 1) = 1 - 8k$$

であるから、

$$\begin{cases} D > 0 & \text{のとき実数解 2 個} \\ D = 0 & \text{のとき実数解 1 個} \\ D < 0 & \text{のとき実数解 0 個} \end{cases}$$

を k で表して、

$$\begin{cases} k < \frac{1}{8} & \text{のとき実数解 2 個} \\ k = \frac{1}{8} & \text{のとき実数解 1 個} \\ k > \frac{1}{8} & \text{のとき実数解 0 個} \end{cases}$$

である。

- (2) $-1 \leq x < 2$ より $-2 \leq 2x < 4$ 、また $4 < y \leq 6$ より $-6 \leq -y < 4$ である。これを用いると

$$-1 + 4 < x + y < 2 + 6, \quad -2 - 6 \leq 2x - y < 4 + 4$$

となるから、2 つの式のとりうる値の範囲は

$$3 < x + y < 8, \quad -8 \leq 2x - y < 8$$

である。

- (3) 2 つの方程式が共に実数解 α を持つとすると、

$$\alpha^2 - (2m + 1)\alpha + 3m = 0 \tag{5.1}$$

$$\alpha^2 - 3m\alpha + 5m - 2 = 0 \tag{5.2}$$

が成り立つ。(5.1)から (5.2)を引くと

$$(m - 1)\alpha - 2m + 2 = 0$$

となり，整理して

$$(m-1)(\alpha-2)=0 \quad (5.3)$$

を得る。これを解くと $m=1$ または $\alpha=2$ である。

- (i) $m=1$ のとき，元の方程式2つにこの値を代入し，どちらも

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

を得るが，この2次方程式は判別式 $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0$ より実数解を持たないため，題意を満たさない。

- (ii) $\alpha=2$ のとき，(5.1)に代入して

$$2^2 - (2m+1) \cdot 2 + 3m = 0$$

ゆえに $m=2$ である。このとき，元の2つの方程式は

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

であり，前者の解は $x=2$ または $x=3$ ，後者の解は $x=2$ または $x=4$ だから，2つの方程式はただ一つの共通する実数解 $x=2$ を持つ。

以上より，答えは $m=2$ と共通解 $x=2$ である。

5.3 解説

- (1) 2次方程式の相異なる実数解の個数は，その判別式 D と0との大小で決まります。 $D > 0$ で異なる実数解2個， $D = 0$ で重解1個， $D < 0$ で実数解なし。
- (2) 等号の有無に注意。 $2x - y$ の左側のみ， $2x$ と $-y$ の左側にどちらとも等号があるため，等号が成り立ち得ます。
- (3) 議論の途中で $m=1$ または $\alpha=2$ を得ますが，実際に方程式を考えて題意が成り立つのかを考える必要があります。なぜかというところ，2つの方程式が共通解 α を持つときに (5.3) は成り立ちますが，(5.3) が成り立つからといって必ずしも2つの方程式が共通解 α を持つとは限らないためです。（「集合と論理」を参照，(5.3) は2つの方程式が共通の実数解を持つための必要条件だが十分条件ではない。）

5.4 採点

【第5問 16点】

- (1) 4点
- (2) 5点
 - 片方のみ正解で3点。両方正解で5点。
- (3) 7点
 - 議論の内容によっては部分点を与える。