

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2025 年

試験時間：180 分

問題数：5 問

配点：300 点

第 1 問

関数 $f(x)$ を $x \geq 0$ に対して $f(x) = x \log(1+x)$ と定める.

- (1) 不定積分 $\int x \log(1+x) dx$ を求めよ.
- (2) $y = f(x)$ ($x \geq 0$) の逆関数を $y = g(x)$ ($x \geq 0$) とする. また a, b を $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ となる実数とする. このとき定積分

$$I = \int_a^b g(x) dx$$

の値を求めよ.

- (3) 関数 $P(x)$ を $x \geq 0$ に対して $P(x) = \int_0^x \sqrt{1+f(t)} dt$ と定める. このとき $y = P(x)$ について, 定義域を $x \geq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい. 関数 $R(x)$ を $x \geq 0$ に対して

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)} dv$$

と定めるとき, $R(x)$ を求めよ.

第 2 問

空間の点 $(0, 0, 1)$ を通り $(1, -1, 0)$ を方向ベクトルとする直線を ℓ とし, 点 $(1, 0, 3)$ を通り $(0, 1, -2)$ を方向ベクトルとする直線を m とする.

- (1) P を ℓ 上の点とし, Q を m 上の点とする. また直線 PQ は直線 ℓ と直線 m に垂直であるとする. このとき P と Q の座標, および線分 PQ の長さを求めよ.

- (2) ℓ 上に 2 点

$$\begin{aligned} A &= (t, -t, 1) \\ B &= (2 + t + \sin t, -2 - t - \sin t, 1) \end{aligned}$$

があり, m 上に 2 点

$$\begin{aligned} C &= (1, t, 3 - 2t) \\ D &= (1, 2 + t + \cos t, -1 - 2t - 2 \cos t) \end{aligned}$$

があるとする. ただし, t は実数とする. 四面体 $ABCD$ の体積を $V(t)$ とする. $V(0)$ を求めよ.

- (3) t が $t \geq 0$ を動くとき, $V(t)$ の最大値と最小値を求めよ.

第 3 問

$0 < p < 1$ とする．表が出る確率が p ，裏が出る確率が $1 - p$ である 1 枚のコインを使って次のゲームを行う．

- ・ ゲームの開始段階で点数は 0 点．
- ・ コインを投げ続け，表が出るごとに 1 点加算し，裏が出たときは点数はそのまま．
- ・ 2 回続けて裏が出たらゲームは終了．

0 以上の整数 n に対し，ゲームが終わったときに n 点となっている確率を Q_n とする．

- (1) Q_1, Q_2 を p を用いて表せ．
- (2) Q_n を n と p を用いて表せ．
- (3) $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して次式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

必要ならば $0 < x < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ であることを証明なしで使ってもよい．

- (4) 無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} nQ_n$ を p を用いて表せ．

第 4 問

数列 $\{a_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 1 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

により定め、数列 $\{b_n\}$ を

$$\tan b_n = \frac{1}{a_n}$$

により定める．ただし、 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ であるものとする．

- (1) $n \geq 2$ に対して、 $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ を求めよ．
- (2) $m \geq 1$ (m は整数) に対して、 $a_{2m} \cdot \tan(b_{2m+1} + b_{2m+2})$ を求めよ．
- (3) 無限級数 $\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}$ を求めよ．

第 5 問

(1) 関数

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3} \quad (t \neq 0)$$

の増減を調べ、グラフの概形をかけ.

(2) 実数 x, y, z が, 条件

$$\begin{cases} x < y < z \\ xyz \neq 0 \\ x^3y^2 - x^3 = x^2y^3 - y^3 \\ y^3z^2 - y^3 = y^2z^3 - z^3 \end{cases}$$

を満たしながら動くとき, x が取り得る値の範囲を求めよ.