

(2024 年度前期日程)

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 問題冊子は 16 ページ，解答用紙は 5 ページである。
3. 各解答用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて解答用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題冊子および解答用紙は切りはなさないこと。
6. 解答用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60 点)

xy 平面上の曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ に, 点 $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$ ($a > 0$) で接する円のうち, y 軸の正の部分にも接するものを S_a とおく. a が正の実数を動くときの S_a の中心の軌跡を C , とくに S_1 の中心を P とする.

- (1) 点 P の座標を求めよ.
- (2) 点 P における曲線 C の接線の傾きを求めよ.

(下 書 き 用 紙)

2 (60 点)

実数全体を定義域にもつ微分可能な関数 $f(t)$, $g(t)$ が次の 6 つの条件を満たしているとする.

$$f'(t) = -f(t)g(t), \quad g'(t) = \{f(t)\}^2, \\ f(t) > 0, \quad |g(t)| < 1, \quad f(0) = 1, \quad g(0) = 0$$

このとき,

$$p(t) = \{f(t)\}^2 + \{g(t)\}^2, \quad q(t) = \log \frac{1+g(t)}{1-g(t)}$$

とおく.

- (1) $p'(t)$ を求めよ.
- (2) $q'(t)$ は定数関数であることを示せ.
- (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ を求めよ.
- (4) $f(T) = g(T)$ となる正の実数 T に対して, 媒介変数表示された平面曲線 $(x, y) = (f(t), g(t))$ ($0 \leq t \leq T$) の長さを求めよ.

(下 書 き 用 紙)

3 (60 点)

xy 平面上に, 点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$ (ただし $0 < a < b$) をとる. 点 A, B を通る直線を ℓ とし, 点 C を通り線分 BC に垂直な直線を k とする. さらに, 点 A を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_1 とし, 点 C_1 を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_1 とする. 以下, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 点 A_n を通り y 軸に平行な直線と直線 k との交点を C_{n+1} , 点 C_{n+1} を通り x 軸に平行な直線と直線 ℓ との交点を A_{n+1} とする.

(1) 点 A_n, C_n の座標を求めよ.

(2) $\triangle CBA_n$ の面積 S_n を求めよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BA_n}{BC}$ を求めよ.

(下 書 き 用 紙)

4 (60 点)

n を正の整数とし, $C_1, \dots, C_n$ を n 枚の硬貨とする. 各 $k = 1, \dots, n$ に対し, 硬貨 C_k を投げて表が出る確率を p_k , 裏が出る確率を $1 - p_k$ とする. この n 枚の硬貨を同時に投げ, 表が出た硬貨の枚数が奇数であれば成功, というゲームを考える.

(1) $p_k = \frac{1}{3}$ ($k = 1, \dots, n$) のとき, このゲームで成功する確率 X_n を求めよ.

(2) $p_k = \frac{1}{2(k+1)}$ ($k = 1, \dots, n$) のとき, このゲームで成功する確率 Y_n を求めよ.

(3) $n = 3m$ (m は正の整数) で, $k = 1, \dots, 3m$ に対して

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{3m} & (k = 1, \dots, m) \\ \frac{2}{3m} & (k = m+1, \dots, 2m) \\ \frac{1}{m} & (k = 2m+1, \dots, 3m) \end{cases}$$

とする. このゲームで成功する確率を Z_{3m} とするとき, $\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{3m}$ を求めよ.

(下 書 き 用 紙)

5 (60 点)

整数の組 (a, b) に対して 2 次式 $f(x) = x^2 + ax + b$ を考える. 方程式 $f(x) = 0$ の複素数の範囲のすべての解 α に対して $\alpha^n = 1$ となる正の整数 n が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ.

(下 書 き 用 紙)

