

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2022年

試験時間：180分

問題数：5問

配点：300点

第 1 問

a, b を実数とし, $f(z) = z^2 + az + b$ とする. a, b が

$$|a| \leq 1, \quad |b| \leq 1$$

を満たしながら動くとき, $f(z) = 0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ.

第 2 問

3つの正の整数 a, b, c の最大公約数が 1 であるとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $a + b + c, bc + ca + ab, abc$ の最大公約数は 1 であることを示せ.
- (2) $a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^3 + b^3 + c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ.

第 3 問

α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする. $\angle A = \alpha$ および $\angle P = \frac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が, 次の 2 つの条件 (a), (b) を満たしながら, 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \frac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする.

(a) 時刻 t での点 A, B の座標は, それぞれ $A(\sin t, 0)$, $B(0, \cos t)$ である.

(b) 点 P は第一象限内にある.

このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し, その直線の方程式を α を用いて表せ.

(2) 時刻 $t = 0$ から時刻 $t = \frac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のを α を用いて表せ.

(3) xy 平面内において, 連立不等式

$$x^2 - x + y^2 < 0, \quad x^2 + y^2 - y < 0$$

により定まる領域を D とする. このとき, 点 P は領域 D には入らないことを示せ.

第 4 問

a は正の実数とする．複素数 z が $|z-1| = a$ かつ $z \neq \frac{1}{2}$ を満たしながら動くとき，複素数平面上の点 $w = \frac{z-3}{1-2z}$ が描く図形を K とする．このとき，次の問いに答えよ．

- (1) K が円となるための a の条件を求めよ．また，そのとき K の中心が表す複素数と K の半径を，それぞれ a を用いて表せ．
- (2) a が (1) の条件を満たしながら動くとき，虚軸に平行で円 K の直径となる線分が通過する領域を複素数平面上に図示せよ．

第 5 問

a は $0 < a \leq \frac{\pi}{4}$ を満たす実数とし, $f(x) = \frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - ax\right)$ とする.
このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 次の等式 (*) を満たす a がただ 1 つ存在することを示せ.

$$(*) \quad \int_0^1 f(x) dx = 1$$

- (2) $0 \leq b < c \leq 1$ を満たす実数 b, c について, 不等式

$$f(b)(c-b) \leq \int_b^c f(x) dx \leq f(c)(c-b)$$

が成り立つことを示せ.

- (3) 次の試行を考える.

[試行] n 個の数 $1, 2, \dots, n$ を出目とする, あるルーレットを k 回まわす.

この [試行] において, 各 $i = 1, 2, \dots, n$ について i が出た回数を $S_{n,k,i}$ とし,

$$(**) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{n,k,i}}{k} = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx$$

が成り立つとする. このとき, (1) の等式 (*) が成り立つことを示せ.

- (4) (3) の [試行] において出た数の平均値を $A_{n,k}$ とし, $A_n = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{n,k}$ とする. (**)

が成り立つとき, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{n}$ を a を用いて表せ.