

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2021 年

試験時間：180 分

問題数：5 問

配点：300 点

第 1 問

正の整数に関する条件

(*) 10 進法で表したときに, どの位にも数字 9 が現れない

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) k を正の整数とすると, 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 (*) を満たす正の整数の個数を a_k とする. このとき, a_k を k の式で表せ.

(2) 正の整数 n に対して,

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n \text{ が条件 (*) を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件 (*) を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく. このとき, すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

第 2 問

xy 平面上の楕円

$$E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) a, b を実数とする. 直線 $\ell: y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a, b の条件を求めよ.
- (2) 実数 a, b, c に対して, 直線 $\ell: y = ax + b$ と直線 $m: y = ax + c$ が, それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする. ただし, $b > c$ とする. 直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P , 大きい方を Q とする. また, 直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S , 大きい方を R とする. このとき, 等式

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

が成り立つための a, b, c の条件を求めよ.

- (3) 楕円 E 上の 4 点の組で, それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ.

第 3 問

以下の問いに答えよ.

- (1) 正の整数 n に対して, 二項係数に関する次の等式を示せ.

$$n {}_{2n}C_n = (n+1) {}_{2n}C_{n-1}$$

また, これを用いて ${}_{2n}C_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ.

- (2) 正の整数 n に対して,

$$a_n = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

とおく. このとき, $n \geq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ.

- (3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ.

第 4 問

S を、座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする． S 上を動く点 A, B, C, D に対して

$$F = 2(AB^2 + BC^2 + CA^2) - 3(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とするとき、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書けることを示し、定数 k を求めよ．

- (2) 点 A, B, C, D が球面 S 上を動くときの、 F の最大値 M を求めよ．

- (3) 点 C の座標が $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$ 、点 D の座標が $(1, 0, 0)$ であるとき、 $F = M$ となる S 上の点 A, B の組をすべて求めよ．

第 5 問

xy 平面上の円 $C : x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ($a > 0$) を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 円 C が $y \geq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ.
- (2) 円 C が $y \geq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ.
- (3) a が (2) の範囲にあるとする. xy 平面において連立不等式

$$|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4}, \quad y \geq x^2 - x^4, \quad x^2 + (y - a)^2 \geq a^2$$

で表される領域 D を, y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.