

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 問題冊子は 16 ページ，解答用紙は 5 ページである。
3. 各解答用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて解答用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題冊子および解答用紙は切りはなさないこと。
6. 解答用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60 点)

正の整数に関する条件

(*) 10 進法で表したときに, どの位にも数字 9 が現れない

を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) k を正の整数とすると, 10^{k-1} 以上かつ 10^k 未満であって条件 (*) を満たす正の整数の個数を a_k とする. このとき, a_k を k の式で表せ.

(2) 正の整数 n に対して,

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & (n \text{ が条件 (*) を満たすとき}) \\ 0 & (n \text{ が条件 (*) を満たさないとき}) \end{cases}$$

とおく. このとき, すべての正の整数 k に対して次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{n=1}^{10^k-1} b_n < 80$$

(下 書 き 用 紙)

2 (60 点)

xy 平面上の楕円

$$E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

について、以下の問いに答えよ.

- (1) a, b を実数とする. 直線 $\ell: y = ax + b$ と楕円 E が異なる 2 点を共有するための a, b の条件を求めよ.
- (2) 実数 a, b, c に対して, 直線 $\ell: y = ax + b$ と直線 $m: y = ax + c$ が, それぞれ楕円 E と異なる 2 点を共有しているとする. ただし, $b > c$ とする. 直線 ℓ と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を P , 大きい方を Q とする. また, 直線 m と楕円 E の 2 つの共有点のうち x 座標の小さい方を S , 大きい方を R とする. このとき, 等式

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$$

が成り立つための a, b, c の条件を求めよ.

- (3) 楕円 E 上の 4 点の組で, それらを 4 頂点とする四角形が正方形であるものをすべて求めよ.

(下 書 き 用 紙)

3 (60 点)

以下の問いに答えよ.

- (1) 正の整数 n に対して, 二項係数に関する次の等式を示せ.

$$n {}_{2n}C_n = (n+1) {}_{2n}C_{n-1}$$

また, これを用いて ${}_{2n}C_n$ は $n+1$ の倍数であることを示せ.

- (2) 正の整数 n に対して,

$$a_n = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

とおく. このとき, $n \geq 4$ ならば $a_n > n+2$ であることを示せ.

- (3) a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ.

(下 書 き 用 紙)

4 (60 点)

S を、座標空間内の原点 O を中心とする半径 1 の球面とする． S 上を動く点 A , B , C , D に対して

$$F = 2(AB^2 + BC^2 + CA^2) - 3(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

- (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ とするとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ によらない定数 k によって

$$F = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{d})$$

と書けることを示し, 定数 k を求めよ．

- (2) 点 A , B , C , D が球面 S 上を動くときの, F の最大値 M を求めよ．

- (3) 点 C の座標が $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$, 点 D の座標が $(1, 0, 0)$ であるとき, $F = M$ となる S 上の点 A , B の組をすべて求めよ．

(下 書 き 用 紙)

5 (60 点)

xy 平面上の円 $C : x^2 + (y - a)^2 = a^2$ ($a > 0$) を考える．以下の問いに答えよ．

- (1) 円 C が $y \geq x^2$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．
- (2) 円 C が $y \geq x^2 - x^4$ で表される領域に含まれるための a の範囲を求めよ．
- (3) a が (2) の範囲にあるとする． xy 平面において連立不等式

$$|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{4}, \quad y \geq x^2 - x^4, \quad x^2 + (y - a)^2 \leq a^2$$

で表される領域 D を, y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(下 書 き 用 紙)

