

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2020 年

試験時間：180 分

問題数：5 問

配点：300 点

第 1 問

次の問いに答えよ.

(1) $|x^2 - x - 23|$ の値が, 3 を法として 2 に合同である正の整数 x をすべて求めよ.

(2) k 個の連続した正の整数 $x_1, \dots, x_k$ に対して,

$$|x_j^2 - x_j - 23| \quad (1 \leq j \leq k)$$

の値がすべて素数になる k の最大値と, その k に対する連続した正の整数 $x_1, \dots, x_k$ をすべて求めよ. ここで k 個の連続した整数とは,

$$x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_1 + k - 1$$

となる列のことである.

第 2 問

複素数平面上の異なる 3 点 A, B, C を複素数 α, β, γ で表す. ここで A, B, C は同一直線上にないと仮定する.

- (1) $\triangle ABC$ が正三角形となる必要十分条件は,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

であることを示せ.

- (2) $\triangle ABC$ が正三角形のとき, $\triangle ABC$ の外接円上の点 P を任意にとる. このとき,

$$AP^2 + BP^2 + CP^2$$

および

$$AP^4 + BP^4 + CP^4$$

を外接円の半径 R を用いて表せ. ただし 2 点 X, Y に対し, XY とは線分 XY の長さを表す.

第 3 問

座標空間に 5 点

$$\begin{aligned} O(0, 0, 0), \quad A(3, 0, 0), \quad B(0, 3, 0), \quad C(0, 0, 4), \\ P(0, 0, -2) \end{aligned}$$

をとる. さらに $0 < a < 3$, $0 < b < 3$ に対して 2 点 $Q(a, 0, 0)$ と $R(0, b, 0)$ を考える.

- (1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする. 平面 H と線分 AC の交点 T の座標, および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ.
- (2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ.

第 4 問

n を正の奇数とする．曲線 $y = \sin x$ ($(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$) と x 軸で囲まれた部分を D_n とする．直線 $x+y=0$ を ℓ とおき， ℓ の周りに D_n を 1 回転させてできる回転体を V_n とする．

- (1) $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ に対して，点 $(x, \sin x)$ を P とおく．また P から ℓ に下ろした垂線と x 軸の交点を Q とする．線分 PQ を ℓ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を x の式で表せ．
- (2) (1) の結果を用いて，回転体 V_n の体積を n の式で表せ．

第 5 問

k を正の整数とし, $a_k = \int_0^1 x^{k-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$ とおく.

- (1) a_{k+2} を a_k と k を用いて表せ.
- (2) k を限りなく大きくするとき, 数列 $\{ka_k\}$ の極限值 A を求めよ.
- (3) (2) の極限值 A に対し, k を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^m a_k - k^n A\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 m, n ($m > n \geq 1$) を求めよ. またそのときの極限值 B を求めよ.

- (4) (2) と (3) の極限值 A, B に対し, k を限りなく大きくするとき, 数列

$$\{k^p a_k - k^q A - k^r B\}$$

が 0 ではない値に収束する整数 p, q, r ($p > q > r \geq 1$) を求めよ. またそのときの極限值を求めよ.