

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2019 年

試験時間：180 分

問題数：5 問

配点：300 点

第 1 問

- (1) $h > 0$ とする．座標平面上の点 $O(0, 0)$ ，点 $P(h, s)$ ，点 $Q(h, t)$ に対して，三角形 OPQ の面積を S とする．ただし， $s < t$ とする．三角形 OPQ の辺 OP ， OQ ， PQ の長さをそれぞれ p ， q ， r とするとき，不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するときの s ， t の値を求めよ．

- (2) 四面体 $ABCD$ の表面積を T ，辺 BC ， CA ， AB の長さをそれぞれ a ， b ， c とし，辺 AD ， BD ， CD の長さをそれぞれ ℓ ， m ， n とする．このとき，不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成立するのは四面体 $ABCD$ がどのような四面体のときか答えよ．

第 2 問

次の等式が $1 \leq x \leq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A, B を求めよ.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし, $f(x)$ は $1 \leq x \leq 2$ に対して定義される連続関数とする.

第 3 問

i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\frac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

- (1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leq N(r) < 25\}$ を求めよ．
- (2) 複素数平面の相異なる 2 点 z, w を結ぶ線分を $L(z, w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0, 1)$, $L\left(1, 1 + \frac{i}{2}\right)$, $L\left(1 + \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right)$, $L\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2} + i\right)$, $L\left(\frac{1}{2} + i, i\right)$, $L(i, 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

第 4 問

$H_1, \dots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする. $H_1, \dots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \dots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする. 例えば, 空間の座標を (x, y, z) とするとき,

- 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $y = 0$ を H_2 , 平面 $z = 0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 8$,
- 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $y = 0$ を H_2 , 平面 $x + y = 1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 7$,
- 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $x = 1$ を H_2 , 平面 $y = 0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 6$,
- 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $y = 0$ を H_2 , 平面 $z = 0$ を H_3 , 平面 $x + y + z = 1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4) = 15$,

である.

- (1) 各 n に対して $T(H_1, \dots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ.
- (2) 各 n に対して $T(H_1, \dots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ.
ただし $n \geq 2$ とする.
- (3) 各 n に対して $T(H_1, \dots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ.
ただし $n \geq 3$ とする.

第 5 問

$a = \frac{2^8}{3^4}$ として, 数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える.

- (1) 関数 $f(x) = (x+1)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ は $x > 0$ で減少することを示せ.
- (2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し, $b_k = M$ となる k をすべて求めよ.