

(2019 年度前期日程)

数 学

180 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 問題冊子は 16 ページ，解答用紙は 5 ページである。
3. 各解答用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて解答用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題冊子および解答用紙は切りはなさないこと。
6. 解答用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60 点)

- (1) $h > 0$ とする. 座標平面上の点 $O(0, 0)$, 点 $P(h, s)$, 点 $Q(h, t)$ に対して, 三角形 OPQ の面積を S とする. ただし, $s < t$ とする. 三角形 OPQ の辺 OP , OQ , PQ の長さをそれぞれ p , q , r とするとき, 不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成立するときの s , t の値を求めよ.

- (2) 四面体 $ABCD$ の表面積を T , 辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とし, 辺 AD , BD , CD の長さをそれぞれ ℓ , m , n とする. このとき, 不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成立するのは四面体 $ABCD$ がどのような四面体のときか答えよ.

(下 書 き 用 紙)

2 (60 点)

次の等式が $1 \leq x \leq 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 A, B を求めよ.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

ただし, $f(x)$ は $1 \leq x \leq 2$ に対して定義される連続関数とする.

(下 書 き 用 紙)

3 (60 点)

i を虚数単位とする．実部と虚部が共に整数であるような複素数 z により $\frac{z}{3+2i}$ と表される複素数全体の集合を M とする．

- (1) 原点を中心とする半径 r の円上またはその内部に含まれる M の要素の個数を $N(r)$ とする．このとき，集合 $\{r \mid 10 \leq N(r) < 25\}$ を求めよ．
- (2) 複素数平面の相異なる 2 点 z, w を結ぶ線分を $L(z, w)$ で表すとき，6 つの線分 $L(0, 1), L\left(1, 1 + \frac{i}{2}\right), L\left(1 + \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\right), L\left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2} + i\right), L\left(\frac{1}{2} + i, i\right), L(i, 0)$ で囲まれる領域の内部または境界に含まれる M の要素の個数を求めよ．

(下 書 き 用 紙)

4 (60 点)

$H_1, \dots, H_n$ を空間内の相異なる n 枚の平面とする. $H_1, \dots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \dots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする. 例えば, 空間の座標を (x, y, z) とするとき,

● 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $y = 0$ を H_2 , 平面 $z = 0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 8$,

● 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $y = 0$ を H_2 , 平面 $x + y = 1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 7$,

● 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $x = 1$ を H_2 , 平面 $y = 0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 6$,

● 平面 $x = 0$ を H_1 , 平面 $y = 0$ を H_2 , 平面 $z = 0$ を H_3 , 平面 $x + y + z = 1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4) = 15$,

である.

- (1) 各 n に対して $T(H_1, \dots, H_n)$ のとりうる値のうち最も大きいものを求めよ.
- (2) 各 n に対して $T(H_1, \dots, H_n)$ のとりうる値のうち 2 番目に大きいものを求めよ. ただし $n \geq 2$ とする.
- (3) 各 n に対して $T(H_1, \dots, H_n)$ のとりうる値のうち 3 番目に大きいものを求めよ. ただし $n \geq 3$ とする.

(下 書 き 用 紙)

5 (60 点)

$a = \frac{2^8}{3^4}$ として, 数列

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える.

- (1) 関数 $f(x) = (x+1) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ は $x > 0$ で減少することを示せ.
- (2) 数列 $\{b_k\}$ の項の最大値 M を既約分数で表し, $b_k = M$ となる k をすべて求めよ.

(下 書 き 用 紙)

