

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2018年

試験時間：180分

問題数：5問

配点：300点

第 1 問

a, b, c を実数とし, 3 つの 2 次方程式

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 + bx + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + cx + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の解を複素数平面上で考察する.

- (1) 2 つの方程式①, ②がいずれも実数解を持たないとき, それらの解はすべて同一円周上にあるか, またはすべて同一直線上にあることを示せ. また, それらの解がすべて同一円周上にあるとき, その円の中心と半径を a, b を用いて表せ.
- (2) 3 つの方程式①, ②, ③がいずれも実数解を持たず, かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を a, b, c を用いて表せ.

第 2 問

次の問に答えよ.

- (1) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 (x, y, z) を一組求めよ.
- (2) $35x + 91y + 65z = 3$ を満たす整数の組 (x, y, z) の中で $x^2 + y^2$ の値が最小となるもの, およびその最小値を求めよ.

第 3 問

方程式

$$e^x(1 - \sin x) = 1$$

について、次の問に答えよ.

- (1) この方程式は負の実数解を持たないことを示せ. また, 正の実数解を無限個持つことを示せ.
- (2) この方程式の正の実数解を小さい方から順に並べて $a_1, a_2, a_3, \dots$ とし, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく. このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2}$ を求めよ.

第 4 問

xyz 空間内において, 連立不等式

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \quad |z| \leq 6$$

により定まる領域を V とし, 2 点 $(2, 0, 2)$, $(-2, 0, -2)$ を通る直線を ℓ とする.

- (1) $|t| \leq 2\sqrt{2}$ を満たす実数 t に対し, 点 $P_t\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ を通り ℓ に垂直な平面を H_t とする. また, 実数 θ に対し, 点 $(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を L_θ とする. L_θ と H_t との交点の z 座標を t と θ を用いて表せ.
- (2) ℓ を回転軸に持つ回転体で V に含まれるものを考える. このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ.

第 5 問

xyz 空間内の一辺の長さが 1 の立方体

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

を Q とする. 点 X は頂点 $A(0, 0, 0)$ から出発して Q の辺上を 1 秒ごとに長さ 1 だけ進んで隣の頂点に移動する. X が x 軸, y 軸, z 軸に平行に進む確率はそれぞれ p, q, r である. ただし

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad r \geq 0, \quad p + q + r = 1$$

である. X が n 秒後に頂点 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 0, 1)$, $D(0, 1, 1)$ にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n とする.

- (1) a_{n+2} を a_n, b_n, c_n, d_n と p, q, r を用いて表せ.
- (2) $a_n - b_n + c_n - d_n$ を p, q, r, n を用いて表せ.
- (3) a_n を p, q, r, n を用いて表せ.