

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2017年

試験時間：180分

問題数：5問

配点：300点

第 1 問

次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ.

- (i) N の正の約数は 12 個.
- (ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12.

ただし, N の約数には 1 と N も含める.

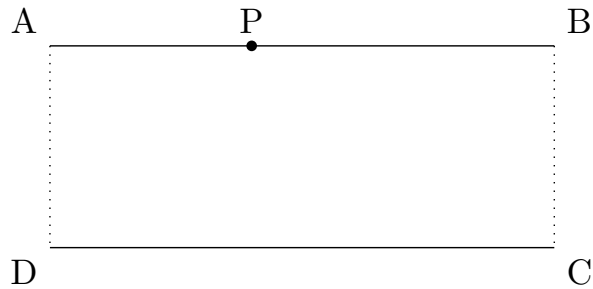
第 2 問

実数 x の関数 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin t|}{1 + \sin^2 t} dt$ の最大値と最小値を求めよ.

第 3 問

a を 1 以上の実数とする．図のような長方形の折り紙 $ABCD$ が机の上に置かれている．ただし $AD = 1$, $AB = a$ である． P を辺 AB 上の点とし, $AP = x$ とする．頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を一回折ったとき, もとの長方形 $ABCD$ からはみ出る部分の面積を S とする．

- (1) S を a と x で表せ．
- (2) $a = 1$ とする． P が A から B まで動くとき, S を最大にするような x の値を求めよ．



なお配布された白紙を自由に使ってよい．(白紙は回収しない．)

第 4 問

n は正の整数とし、文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする． A_n の要素に対し次の条件 (*) を考える．

(*) 文字 c が 2 つ以上連続して現れない．

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき、どの要素も同じ確率で選ばれるとする．

- (1) A_n から要素を一つ選ぶとき、それが条件 (*) を満たす確率 $P(n)$ を求めよ．
- (2) $n \geq 12$ とする． A_n から要素を一つ選んだところ、これは条件 (*) を満たし、その 7 番目の文字は c であった．このとき、この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする．極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)$ を求めよ．

第 5 問

実数 a, b, c に対して $F(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$, $f(x) = x^2 + cx + 1$ とおく.
また, 複素数平面内の単位円周から 2 点 $1, -1$ を除いたものを T とする.

- (1) $f(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ.
- (2) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるならば,

$$F(x) = (x^2 + c_1x + 1)(x^2 + c_2x + 1)$$

を満たす実数 c_1, c_2 が存在することを示せ.

- (3) $F(x) = 0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し, それを満たす点 (a, b) の範囲を座標平面上に図示せよ.