

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2016 年

試験時間：180 分

問題数：5 問

配点：300 点

第 1 問

a を正の定数とし、放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ を C_1 とする.

(1) 点 P が C_1 上を動くとき、 P と点 $Q\left(2a, \frac{a^2}{4} - 2\right)$ の距離の最小値を求めよ.

(2) Q を中心とする円 $(x - 2a)^2 + \left(y - \frac{a^2}{4} + 2\right)^2 = 2a^2$ を C_2 とする. P が C_1 上を動き、点 R が C_2 上を動くとき、 P と R の距離の最小値を求めよ.

第 2 問

$\triangle ABC$ を一辺の長さ 6 の正三角形とする．サイコロを 3 回振り，出た目を順に X, Y, Z とする．出た目に応じて，点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に

$$\overrightarrow{BP} = \frac{X}{6} \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{Y}{6} \overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{AR} = \frac{Z}{6} \overrightarrow{AB}$$

をみたすように取る．

- (1) $\triangle PQR$ が正三角形になる確率を求めよ．
- (2) 点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1 ，点 C, Q, P を互いに線分で結んでできる図形を T_2 ，点 A, R, Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする． T_1, T_2, T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ．
- (3) $\triangle PQR$ の面積を S とし， S のとりうる値の最小値を m とする． m の値および $S = m$ となる確率を求めよ．

第 3 問

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており, S_1 と S_2 は外接している.

- (1) S_1, S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1, P_2 とする. 線分 P_1P_2 の長さを求めよ.
- (2) α の上に乗っており, S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える. それらの球と α の接点は, 1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ.

第 4 問

n を 2 以上の自然数とする.

- (1) n が素数または 4 のとき, $(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ.
- (2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき, $(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ.

第 5 問

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：

$$\begin{cases} x = 3 \cos t - \cos 3t \\ y = 3 \sin t - \sin 3t \end{cases}$$

ただし $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ である．

- (1) $\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を計算し， C の概形を図示せよ．
- (2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．