

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2013年

試験時間：180分

問題数：5問

配点：300点

第 1 問

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の 2 つの解 α, β に対し, $\alpha^n + \beta^n - 3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ.
- (2) 6 個のさいころを同時に投げるとき, ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ.

第 2 問

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $\Delta(A) = ad - bc$, $t(A) = a + d$ と定める.

- (1) 2 次の正方行列 A, B に対して, $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ.
- (2) A の成分がすべて実数で, $A^5 = E$ が成り立つとき, $x = \Delta(A)$ と $y = t(A)$ の値を求めよ. ただし, E は 2 次の単位行列とする.

第 3 問

k を定数とするとき、方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ.

第 4 問

正の整数 n に対し, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

第 5 問

a, b を正の実数とし、円 $C_1 : (x - a)^2 + y^2 = a^2$ と楕円 $C_2 : x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える.

- (1) C_1 が C_2 に内接するための a, b の条件を求めよ.
- (2) $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とし、 C_1 が C_2 に内接しているとする. このとき、第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 (p, q) を求めよ.
- (3) (2) の条件のもとで、 $x \geq p$ の範囲において、 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ.