

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2012年

試験時間：180分

問題数：6問

配点：300点

第 1 問

- (1) 辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ において辺 AB の中点を D , 辺 OC の中点を E とする. 2 つのベクトル $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{AC}$ との内積を求めよ.
- (2) 1 から 6 までの目がそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき, 目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ.

第 2 問

- (1) $\log_{10} 3 = 0.4771$ として, $\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ.
- (2) 実数 a に対して, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す. 10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか.

第 3 問

3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C , 直線 $y = ax$ を l とする.

- (1) C と l が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ.
- (2) a が (1) で求めた範囲内にあるとき, C と l によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. $S(a)$ が最小となる a の値を求めよ.

第 4 問

n を正の整数とする．数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k a_i \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める．

- (1) a_2 および a_3 を求めよ．
- (2) 一般項 a_k を求めよ．
- (3) $b_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$ とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log 2$ を示せ．

第 5 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換を f とする. 原点 $O(0, 0)$ と異なる任意の 2 点 P, Q に対して $\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ}$ が成り立つ. ただし, P', Q' はそれぞれ P, Q の f による像を表す.

(1) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ を示せ.

(2) 1 次変換 f により, 点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(-4, 0)$ に移るとき, A を求めよ.

第 6 問

xyz 空間に 4 点 $P(0, 0, 2)$, $A(0, 2, 0)$, $B(\sqrt{3}, -1, 0)$, $C(-\sqrt{3}, -1, 0)$ をとる.
四面体 $PABC$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ をみたす部分の体積を求めよ.