

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2010 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

配点：250 点

第 1 問

$f(x) = 1 - \cos x - x \sin x$ とする.

- (1) $0 < x < \pi$ において, $f(x) = 0$ は唯一の解を持つことを示せ.
- (2) $J = \int_0^\pi |f(x)| dx$ とする. (1) の唯一の解を α とするとき, J を $\sin \alpha$ の式で表せ.
- (3) (2) で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ.

第 2 問

a を正の整数とする．正の実数 x についての方程式

$$(*) \quad x = \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \right]$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを $a_1, a_2, a_3, \dots$ とする．ここに $[]$ はガウス記号で、実数 u に対し、 $[u]$ は u 以下の最大の整数を表す．

- (1) $a = 7, 8, 9$ の各々について $(*)$ の解があるかどうかを判定し、ある場合は解 x を求めよ．
- (2) a_1, a_2 を求めよ．
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ を求めよ．

第 3 問

1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く．このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする．

- (1) $p(8)$ を求めよ．
- (2) 正の整数 k に対し， $p(3k+2)$ を k で表せ．

第 4 問

a を正の定数とする．原点を O とする座標平面上に定点 $A = A(a, 0)$ と， A と異なる動点 $P = P(x, y)$ をとる．次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し

$$\frac{AQ}{AP} \leq 2 \quad \text{ならば} \quad \frac{QP}{OQ} \leq \frac{AP}{OA}$$

を満たす P からなる領域を D とする． D を図示せよ．