

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2008 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

配点：250 点

第 1 問

正の実数 a, b に対し, $x > 0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする.

- (1) 接点の座標 (s, t) を a を用いて表せ. また, b を a の関数として表せ.
- (2) $0 < h < s$ をみたす h に対し, 直線 $x = h$ および 2 つの曲線 $y = x^a$, $y = \log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする. $\lim_{h \rightarrow 0} A(h)$ を a で表せ.

第 2 問

実数 x に対し, x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする. a, b を正の実数とすると, 極限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^c \left(\frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \right)$$

が収束するような実数 c の最大値と, そのときの極限值を求めよ.

第 3 問

いびつなサイコロがあり、1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし、1 回目に奇数、2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1) $P \geq \frac{1}{6}$ であることを示せ。また、等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2) $\frac{1}{4} \geq Q \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ であることを示せ。

第 4 問

平面の原点 O を端点とし、 x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$, α (ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$) である半直線を L_1 , L_2 とする. L_1 上に点 P , L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり, 点 R を, 直線 PQ に対し原点 O の反対側に $\triangle PQR$ が正三角形になるようにとる.

- (1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき, 点 R の座標を求めよ.
- (2) 2 点 P , Q が, 線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1 , L_2 上を動くとき, 点 R の軌跡はある楕円の一部分であることを示せ.