

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2007 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

配点：250 点

第 1 問

p を素数, n を 0 以上の整数とする.

- (1) m は整数で $0 \leq m \leq n$ とする. 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ.
- (2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し, その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ.

第 2 問

正数 a に対して、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線を、 A を中心に -30° 回転した直線を ℓ とする． ℓ と $y = x^2$ との交点で A でない方を B とする．さらに点 $(a, 0)$ を C ，原点を O とする．

- (1) ℓ の式を求めよ．
- (2) 線分 OC ， CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ ，線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする．このとき

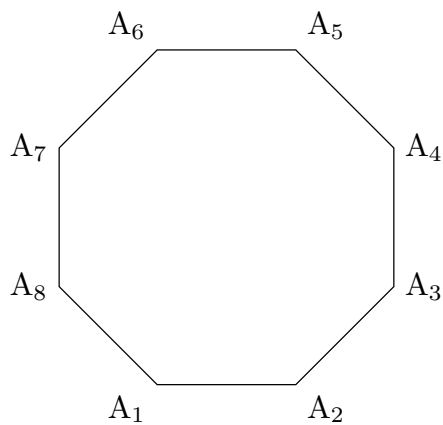
$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)}$$

を求めよ．

第 3 問

一辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上に 3 点 P , Q , R が動くとする.

- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ.
- (2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し, $\angle PQR = 90^\circ$ となるときの $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ.



第 4 問

- (1) 整数 $n = 0, 1, 2, \dots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x) = a_n(x - n)(n + 1 - x)$$

とおく. 2つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ.

- (2) $f_n(x)$ は (1) で定めたものとする. $y = f_0(x)$, $y = e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0 , $n \geq 1$ に対し $y = f_{n-1}(x)$, $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

を求めよ.