

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2006 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

配点：250 点

第 1 問

以下の問に答えよ。

(1) 自然数 n に対し $I(n) = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\sin x| dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$0 \leq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx - s \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)s \quad (0 \leq s \leq 1)$$

(3) a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。 $[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| dt - 1 \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$

第 2 問

以下の問に答えよ。

- (1) a, b を正の定数とし, $g(t) = \frac{1}{b}t^a - \log t$ とおく。 $t > 0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ極値を求めよ。
- (2) m を正の定数とし, xy 座標平面において条件
- (a) $y > x > 0$
- (b) すべての $t > 0$ に対し $\frac{1}{y}t^x - \log t \geq m$
- を満たす点 (x, y) からなる領域を D とする。 D の概形を図示せよ。
- (3) (2) の領域 D の面積を求めよ。

第 3 問

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件 (a) と (b) を満たしながら動くとき、これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

- (a) 3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。
- (b) 3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。

第 4 問

空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を, それぞれ K, L, M, N とする。

- (1) $4\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{LN} = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{AC}|$ はベクトル $\overrightarrow{AC}$ の長さを表す。
- (2) 四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ を示せ。
- (3) 辺 AC の中点を P とし, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{6}$ とする。(2) の仮定のもとで, 四面体 PKLN の体積を求めよ。