

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2005 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

配点：250 点

第 1 問

e を自然対数の底とし，数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $n \geq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2) $n \geq 1$ に対し $a_n > a_{n+1} > 0$ なることを示せ。

(3) $n \geq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)}(e-2)$$

第 2 問

1 から 6 までの目が $\frac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを振り, 1 回目に出る目を α , 2 回目に出る目を β とする。2 次式 $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + sx + t$ を $f(x)$ とおき $f(x)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする。

- (1) s および t の期待値を求めよ。
- (2) a, b, c および d の期待値を求めよ。

第 3 問

D を半径 1 の円盤, C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。 D がつぎの条件 (a), (b) を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき, D が通過する部分の体積を求めよ。

- (a) D の中心は C 上にある。
- (b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する。

第 4 問

実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとする。

- (1) $s = x + y, t = xy$ とするとき、点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。
- (2) 負でない定数 $m \geq 0$ をとるとき、 $xy + m(x + y)$ の最大値、最小値を m を用いて表せ。