

(2005 年度前期日程)

数 学

150 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 問題冊子は 14 ページ，解答用紙は 4 ページである。
3. 各解答用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて解答用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題冊子および解答用紙は切りはなさないこと。
6. 解答用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60 点)

e を自然対数の底とし, 数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $n \geq 3$ のとき, 次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2) $n \geq 1$ に対し $a_n > a_{n+1} > 0$ なることを示せ。

(3) $n \geq 2$ のとき, 以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)} (e-2)$$

(下 書 き 用 紙)

2 (50 点)

1 から 6 までの目が $\frac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを振り, 1 回目に出る目を α , 2 回目に出る目を β とする。2 次式 $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + sx + t$ を $f(x)$ とおき $f(x)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする。

(1) s および t の期待値を求めよ。

(2) a, b, c および d の期待値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

3 (70 点)

D を半径 1 の円盤, C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。 D がつぎの条件 (a), (b) を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき, D が通過する部分の体積を求めよ。

(a) D の中心は C 上にある。

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する。

(下 書 き 用 紙)

4 (70 点)

実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとする。

- (1) $s = x + y, t = xy$ とするとき、点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。
- (2) 負でない定数 $m \geq 0$ をとるとき、 $xy + m(x + y)$ の最大値、最小値を m を用いて表せ。

(下 書 き 用 紙)

