

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2003 年

試験時間：150 分

問題数：4 問

配点：250 点

第 1 問

- (1) 3 次関数 $y = -x^3 + ax^2 + bx$ ($a > 0$) のグラフを C とする。原点を通る直線で、 C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。
- (2) (1) で求めた直線のうち、傾きの大きい方を l_1 、小さい方を l_2 とする。 C と l_1 が囲む部分の面積を S_1 、 C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この二つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。

第 2 問

2 辺の長さの比が $1 : a$ ($a > 1$) の長方形がある。この長方形から 1 本の線分によって切るにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ、再び同じ要領で正方形を取り去り、残りが正方形でない限りこの操作を続ける。例えば、 $a = 3$, $a = \frac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

- (1) 3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。
- (2) n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。

第 3 問

$\triangle ABC$ において、辺 AB の中点を M 、辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x : 1 - x$ ($0 \leq x < 1$) の比に内分する点 P と、辺 AC を $y : 1 - y$ ($0 \leq y < 1$) の比に内分する点 Q をとり、線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき、 R が $\triangle AMN$ に含まれるような (x, y) 全体を xy 平面に図示し、その面積を求めよ。(ただし、辺 AB 、辺 AC を $0 : 1$ の比に内分する点とは、ともに点 A のこととする。)

第 4 問

関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を次の漸化式により定める。

$$f_1(x) = x^2, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし, $f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式であることを示し, x^{n+1} の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0)$, $f_n^{(2)}(0)$, $f_n^{(3)}(0)$, $f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。