

(2003 年度前期日程)

数 学

150 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 問題冊子は 14 ページ，解答用紙は 4 ページである。
3. 各解答用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて解答用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題冊子および解答用紙は切りはなさないこと。
6. 解答用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

1 (60 点)

- (1) 3 次関数 $y = -x^3 + ax^2 + bx$ ($a > 0$) のグラフを C とする。原点を通る直線で、 C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。
- (2) (1) で求めた直線のうち、傾きの大きい方を l_1 、小さい方を l_2 とする。 C と l_1 が囲む部分の面積を S_1 、 C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この二つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

2 (60 点)

2 辺の長さの比が $1 : a$ ($a > 1$) の長方形がある。この長方形から 1 本の線分によって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ、再び同じ要領で正方形を取り去り、残りが正方形でない限りこの操作を続ける。例えば、 $a = 3$, $a = \frac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

- (1) 3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。
- (2) n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

3 (70 点)

$\triangle ABC$ において、辺 AB の中点を M 、辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x : 1 - x$ ($0 \leq x < 1$) の比に内分する点 P と、辺 AC を $y : 1 - y$ ($0 \leq y < 1$) の比に内分する点 Q をとり、線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき、 R が $\triangle AMN$ に含まれるような (x, y) 全体を xy 平面に図示し、その面積を求めよ。(ただし、辺 AB 、辺 AC を $0 : 1$ の比に内分する点とは、ともに点 A のこととする。)

(下 書 き 用 紙)

4 (60 点)

関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を次の漸化式により定める。

$$f_1(x) = x^2, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし, $f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式であることを示し, x^{n+1} の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0)$, $f_n^{(2)}(0)$, $f_n^{(3)}(0)$, $f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

