

入学試験過去問題

数 学

東京科学大学（理工学系）

対象年度：2000年

試験時間：150分

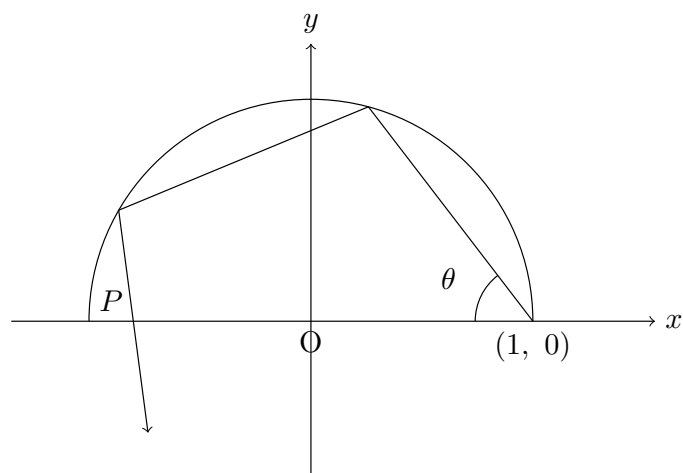
問題数：4問

配点：250点

第 1 問

(x, y) 平面において半円： $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ の内側が鏡になっているとする。図のように、定点 $(1, 0)$ より x 軸となす角 θ で光線が発射され、2 回半円に反射したのち、 x 軸上の点 P を通過したとする。

- (1) このような状況が起こるための θ の範囲を求めよ。
- (2) P の座標を θ を用いて表せ。
- (3) θ が (1) の範囲を動くときの P の動く範囲を求めよ。



第 2 問

- (1) 極座標表示された複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ をみたすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。
- (2) n を自然数とすると、 $|1 + z + \cdots + z^n|^2$ を r, θ, n を用いて表せ。
- (3) 複素数 z が $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ をみたすならば、すべての自然数 n にたいし

$$|1 + z + \cdots + z^n| < 1$$

が成り立つことを示せ。

第 3 問

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り、その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。

第 4 問

n は 2 以上の自然数とする。関数

$$y = e^x \quad \cdots \cdots (\text{ア})$$

$$y = e^{nx} - 1 \quad \cdots \cdots (\text{イ})$$

について以下の問いに答えよ。

(1) (ア) と (イ) のグラフは第 1 象限においてただひとつの交点を持つことを示せ。

(2) (1) で得られた交点の座標を (a_n, b_n) としたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{と} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$$

を求めよ。

(3) 第 1 象限内で (ア) と (イ) のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。
このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$$

を求めよ。