

(2000 年度前期日程)

数 学

150 分

注 意 事 項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 問題冊子は 14 ページ，解答用紙は 4 ページである。
3. 各解答用紙の上の枠内に受験番号を記入し，下の枠内には受験番号の下 2 桁の数字を忘れずに記入すること。
4. 解答はすべて解答用紙の枠内に明瞭に記入すること。裏面は採点の対象としない。
5. 問題冊子および解答用紙は切りはなさないこと。
6. 解答用紙に記入する受験番号の数字の字体は，下記の例にならい，明瞭に記入すること。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

試験問題は、つぎのページより始まります。

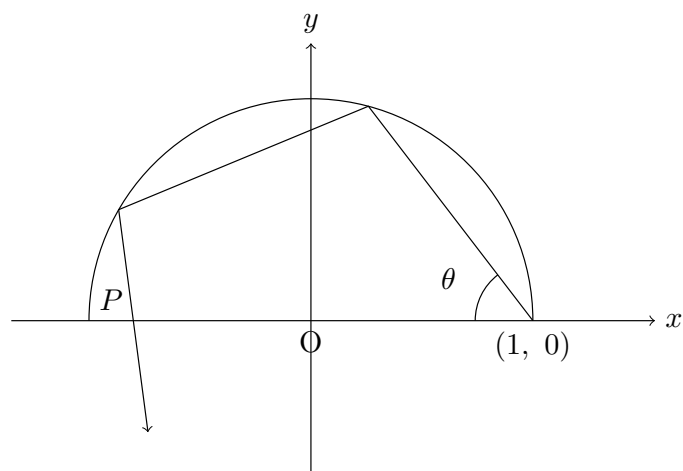
1 (70 点)

(x, y) 平面において半円： $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ の内側が鏡になっているとする。
図のように、定点 $(1, 0)$ より x 軸となす角 θ で光線が発射され、2 回半円に反射したのち、 x 軸上の点 P を通過したとする。

(1) このような状況が起こるための θ の範囲を求めよ。

(2) P の座標を θ を用いて表せ。

(3) θ が (1) の範囲を動くときの P の動く範囲を求めよ。



(下 書 き 用 紙)

2 (60 点)

(1) 極座標表示された複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ をみたすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。

(2) n を自然数とすると、 $|1 + z + \cdots + z^n|^2$ を r, θ, n を用いて表せ。

(3) 複素数 z が $\left| z + \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$ をみたすならば、すべての自然数 n にたいし

$$|1 + z + \cdots + z^n| < 1$$

が成り立つことを示せ。

(下 書 き 用 紙)

3 (60 点)

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り、その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

4 (60 点)

n は 2 以上の自然数とする。関数

$$y = e^x \quad \dots\dots (\text{ア})$$

$$y = e^{nx} - 1 \quad \dots\dots (\text{イ})$$

について以下の問いに答えよ。

(1) (ア) と (イ) のグラフは第 1 象限においてただひとつの交点を持つことを示せ。

(2) (1) で得られた交点の座標を (a_n, b_n) としたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{と} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$$

を求めよ。

(3) 第 1 象限内で (ア) と (イ) のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$$

を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

